

一位國小教師實施數學探究教學之歷程與任務

徐偉民* 黃暄閔**

本研究旨在探討數學探究教學的歷程及歷程中教師關注的教學任務。以一位主修數學教育的國小資深教師為對象，採個案研究法，透過教學錄影和訪談進行資料蒐集。結果發現個案教師的數學探究教學從呈現挑戰題開始，歷經連結理解、探究解題、精緻／一般化等階段，不同階段關注的教學任務不同：連結理解階段個案教師關注「提供線索」，協助學生理解題意與問題之所求；探究解題階段關注「要求說明」，藉此來發展學生的解題推理；精緻／一般化階段關注「順序化」學生的解題歷程，以得出後續應用的解題方法。個案教師的數學探究教學緊扣著數學解題的歷程，過程中透過提問和學生互動，意圖達成理解題意、發展解題、推理應用的教學目的。

關鍵字：個案研究、教學任務、國小教師、數學探究教學

* 作者現職：國立屏東大學教育學系特聘教授

** 作者現職：臺北市中山國民小學教師

通訊作者：徐偉民，e-mail: ben8535@mail.nptu.edu.tw

壹、緒論

一、研究源起

現代社會變遷快速，教育改革的浪潮也一波接著一波，從九年一貫強調以學生為主體，培養學生主動探索與研究的精神（教育部，2003），到目前十二年國教強調整合個人知識、能力及態度的素養培育，以面對生活的挑戰（教育部，2018）。為了達成教育改革的目標，教師的教學方式必須要調整，從講述與傳遞知識為主的教學取向，轉向營造與鼓勵學生思考、討論、探究來主動建構與溝通個人理解的教學，才能培養學生主動思考、推理和解決問題的能力。但什麼取向的數學教學才能落實強調素養培育的目標呢？

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991）指出，當學生處於探究的情境中，能夠促進他們數學理解和數學思維的發展；Kwon 等人（2006）指出透過開放性問題與探究的學習環境，可以培養學生的創造力和解決問題的能力；過去研究發現，以探究的方式來學習數學，能加深學生對數學的理解與思考，提升數學學習的自信與正向態度，並願意尋求合作來解決問題（Kuster et al., 2017; Whitin, 2006），而且數學知識形成的過程充滿模糊與衝突，適合以探究的方式來學習（Borasi, 1992）。由此看來，數學探究教學對學生的認知和情意方面都有正向的影響，但在教室內如何實施？過去相關的研究並沒有明確的主張（Kuster et al., 2017）。Kuster et al. (2017) 指出數學探究教學強調的是主動學習，且透過非結構性但有有意義的問題（ill-structured but meaningful problem）來進行；Makar（2012）認為數學探究是一個依賴數學思考和方法來解決非結構性問題的歷程；林勇吉等人（2014）認為數學探究是一個探索的歷程，從問題來引發學生對問題進行聯想、思考、到問題解決的過程。雖然學者們對數學探究教學有不同的主張，但都提到數學探究教學從解決一個非結構性或非例行性的問題開始，過程中學生主動參與，在教師的引導下透過數學的方法與思考來解題。雖然探究教學有上述的共通性，但現場教學時會經歷哪些階段？每個階段中教師關注的教學任務為何？都令人感到好奇。如果可以了解數學探究教學實施的歷程與教師關注的任務，不但可以豐富相關的研究成果，且有助於未來國內教學的推廣，因為主動探究與數學推理，是數學素養培育的核心（教育部，2018；Programme for International Student Assessment [PISA], 2018）。

二、研究目的

根據上述，本研究選擇一位具有數學教育碩士的國小資深教師為對象，探討她在數學課中實施探究教學的情形，以達成以下的目的：

- (一) 探討個案教師數學探究教學實施的歷程。
- (二) 探討數學探究教學歷程中教師關注的教學任務。

貳、文獻探討

一、數學探究教學的意義與歷程

(一) 數學探究教學的意義

探究，是人類對於某現象產生好奇，願意努力尋找出合理解釋所做出的行為 (Haury, 1993; Jarrett, 1997)。由此來看，數學探究便是以數學相關問題來引起學生的好奇，激起他們解決問題的動機，進而投入思考解決策略的歷程，歷程中依賴數學的思考與方法 (Makar, 2012)。而教室內的數學教學，是以數學問題為焦點，在教師佈題和學生解題之中來進行 (徐偉民, 2017; Stein et al., 2007)。因此，數學探究教學包含了佈題與解題，透過問題的設計 (能引發學生的好奇或興趣) 和教學活動的實施來進行 (Silver, 1997)，過程中提供學生觀察、探索、討論、推理、溝通、修正、確認、建構知識、尋找解題模式與規則的學習機會 (紀雅芳、溫嫩純, 2008)，藉此培養學生解題的創意 (Silver, 1997)。數學探究教學有助於學生發展數學的理解和思維 (NCTM, 1991)，並增加數學學習的自信與正向態度 (Bonotto, 2013; Kuster et al., 2017; Makar, 2012)。

(二) 數學探究教學的歷程

由數學探究教學的意義來看，數學探究教學從教師提供一個能引發學生興趣的問題開始，再引導學生以數學的方法來進行思考、推理與解題。在問題的類型上，Makar (2012) 認為學校數學提供的都是結構明確 (well-structured) 且過度簡化的問題，學生僅需幾分鐘就可以得出單一的正確答案，這樣的問題無法引發學生進行探究的需求。因此 Makar (2012) 從數學與生活連結的觀點出發，主張教師應提供生活相關的非結構性問題，透過結構化的歷程來對問題進行定義，釐清解題相關的變項；之後再透過數學化的方法，來設計與執行解題策略，過程中需要協商與討論。這樣的觀點可以了解 Allmond et al. (2010)

等人提出探究教學的實施，從提供非結構性問題開始，歷經發現問題與數學之間的連結、制定解法、發展解題推理、為自己解法說明與辯護等歷程。

Kuster et al. (2017) 回顧 11 篇數學探究教學的文獻後，從真實數學教育的觀點出發，指出數學探究教學的實施，從非結構但有意義的問題開始，共同的特色是引導學生從非形式化的推理，逐步發展出形式化的推理；引導過程中需要將少數學生的理解，發展出所有學生的理解；並且從非形式化的語言與方法，連結到形式化的數學符號和語言，達成數學化的目的。因此，Kuster et al. (2017) 歸納出數學探究教學的四個原則，包括：「引發學生推理的方法」(generating students ways of reasoning)、「根據學生的貢獻建立(形式化的數學推理)」(building on student contributions)、「發展共享的理解」(developing a shared understanding)、「連結標準的數學語言和符號」(connecting to standard mathematical language and notation)，以呼應引導學生從非形式化推理到形式化推理、從個別的理解到全體的理解、從個別的語言到數學化的符號的教學歷程。歸納出上述四個原則後，Kuster et al. (2017) 針對 K-16 年級探究教學的研究進行檢視，發現每一個原則都被運用在相關研究中，藉此說明四個數學探究教學原則的普遍性。

國內秦爾聰等人(2009)的研究發現，教師在實施數學探究教學時，依循著佈題與解題的歷程，在引導與協助學生完成解題的歷程中，引導學生理解題意、進行探究解題及回顧解題。學者們對於數學探究教學歷程的主張，其實都包含教師外在教學實施與學生內在探究解題的歷程，而且有些共同的觀點，包括從佈挑戰性問題開始，引發學生好奇與探究的興趣；接著協助學生釐清解題重要的線索或變項，將自己思考的歷程與結果向同儕做出合理的解釋；甚至進行解題回顧等。這些共同點將成為本研究資料分析與呈現時的參考。

二、教師在數學探究教學中的任務

教師在數學探究教學中的任務，從探究教學的意義與歷程來看，是指教師在引導學生進行問題探究與解題的歷程中，展現出的教學行為與意圖。Jarrett (1997) 認為探究教學的主要目標，是讓學生成為具備批判思考的解題者，所以教師主要的任務在於創造一個豐富的學習環境，規劃活動來引起學生探究的動機，過程中確認學生所要探究與學習的核心概念，鼓勵學生提出不同意見及想法，並有機會發表來展現學習的成果；從 Kuster et al. (2017) 歸納出的數學探究教學原則中，可以推理教師的主要任務包括一開始引發學生進行想像與發展推理的方法，之後根據學生的解題來發展數學推理並建立共同的理解，最後再將解題思考連結到數學符號以進行後續的推理應用；從 Allmond et al. (2010) 的觀點來看，教師要引導學生發現生活問題與數學之間的連結，並從數學的觀

點來思考問題。之後，教師要協助學生將問題轉換成數學問題，並進行問題的探究與解題，最後協助學生發展解題的推理與方法，並讓學生為自己的解法進行說明與辯護；秦爾聰等人（2009）指出教師在引導學生解題的歷程中，主要的任務有喚起學生舊經驗與探究問題之間的關聯、引導學生進行探究解題、提供學生說明探究的歷程與結果、回顧探究歷程所獲得的知識等。

雖然學者們對於數學探究教學歷程中教師可能關注任務的主張略有不同，但都強調透過問題的設計來引發學生進行探究的動機，過程中引導學生進行舊經驗／知識與新問題之間的連結、鼓勵並要求學生說明探究思考的歷程與結果。這些教學任務從 Allmond et al. (2010) 的觀點來看，其目的在於幫助學生「發現」數學與生活問題之間的關聯、「制定」與「發展」出解題的方法與推理、為自己的思考和推理進行說明與「辯護」等。上述探究教學中教師可能的教學任務，除了可作為資料分析的參考外，也了解到探究教學的歷程是師生共同參與的結果。

三、數學探究教學相關研究的啟發

過去相關研究指出探究教學可以提升學生數學學習的成效：Bonotto (2013) 發現透過非結構性問題的探究與解題，可以提升小學生的解題思考和技巧、態度和信心，擴展對於數學的理解；Makar (2012) 針對 10-13 歲混齡班級的研究發現，透過非結構性生活問題的探究，可以整合與延伸學生對於數學的理解，培養合作、協商、堅持、批判性思考等能力，並應用所學來解決生活中複雜與非結構性的問題；Cifarelli & Cai (2005) 針對大學的研究發現，透過探究的過程學生能建構比較成熟的數學關係，發展出比較抽象的問題描述及進一步構想新的問題；Fielding-wells et al. (2017) 發現透過探究的方式，增加小學生數學討論的參與度，提升學習的動機；秦爾聰等人（2009）發現中學生透過探究的歷程提升了解題的能力，過程中能表達自己的解題思考，精煉自己原有的想法。雖然不同學習階段的研究都指出數學探究教學的成效，但回顧不同學習階段的探究教學文獻後，Kuster et al. (2017) 指出探究教學其實像是個“大帳” (big tent)，包含許多不同的教學取向，但如何實施並不明確，但都指出實施的關鍵在於佈題的內容和引導學生解題的歷程 (Silver, 1997)，尤其是教師佈的問題要具有挑戰性，才能引發學生主動思考與探究，而非「一看」就立即知道有「固定且單一」的解法。不過有些研究者從與生活連結的觀點來強調非結構性問題的重要，如 Allmond et al. (2010)、Kuster et al. (2017)、Makar (2012) 等，但也有研究者認為定義明確的問題同樣可以引發學生的主動思考與探究，如 Boaler (2016) 以“ 18×5 ”的問題，要求用不同的圖解方法來呈現解題歷程，結果引發多元的思考與探究；或是設計圖形規律的問題，讓學生進行探究而引發多元的解題思考與策略。由此來看，雖然問題的內容是數學探究教學的關鍵之

一，但除了與生活連結的非結構性問題外，也可以包含定義清楚的數學問題，而關鍵在於教師如何引導學生進行多元思考、探究並完成解題。

此外，雖然學者們提出不同的數學探究教學歷程與歷程中教師的任務，但是在台灣數學課室中，數學探究教學是如何實施？教師關注的任務為何？國內相關的研究非常有限，僅秦爾聰等人（2009）、林勇吉等人（2014）針對中學階段進行探討。因此，本研究聚焦在實施歷程與教學任務兩個面向，並選擇小學階段為主，一方面因為國內小學階段數學探究教學的研究較少，而且是課程改革與實施的基礎；另一方面是研究者長期投入小學數學教育研究的緣故。希望本研究的完成，可以增進對數學探究教學實施的理解，並作為日後推廣的參考。

參、研究方法

一、研究設計

（一）研究方法、對象與時程

本研究採個案研究法，對象為小婷老師（化名）與其任教之班級（六年級）。採個案研究是因為數學探究教學的議題在國內較少探討，且實施歷程中師生的互動複雜。初探的議題與複雜的歷程，適合採個案研究法來進行探討。

小婷老師畢業於師資培育大學數理教育研究所，主修數學教育。在其 18 年的教學經歷中，有 15 年數學教學的經驗。她習慣的教學方式是依照教科書的內容來進行，但會先說明解題所需要的數學概念（例如複習舊經驗），再呈現教科書中的問題在白板上，請學生進行小組合作討論與解題，但過程中不讓學生打開教科書，避免書中呈現的思考和解題方法限制了學生的思考，而希望透過小組討論來引發多元的解題思考，從學生多元的解題思考和策略中，建立學生對於數學概念和解題歷程的理解，而非由她來講解與示範。在研究進行前，研究者到小婷老師服務的學校進行研究說明，共 2 次，每次時間約 1 小時，徵求有意願參與研究的教師。小婷老師在說明會後表示探究教學強調的主動思考與探究、多元解題歷程和策略的概念，和她目前的教學方式與理念相近，只是她較受限於教科書中的內容，因此表達參與研究的意願。不過小婷老師也表示，在考量教學進度與時間的前提下，她無法將教科書中的每個問題都讓學生進行充分的探究，所以維持原有的教學習慣，即先講述解題相關概念後再進行小組討論與發表的方式，但會選擇合適的單元來設計問題，提供學生更多主動思考與探究解題的機會，以更符合探究教學的意涵與歷程。小婷老師對於教學進度

與時間的考量，其實反映出臺灣一般教師數學教學時的考量（徐偉民，2017）。她服務的學校位於市區，班上學生 26 人，家長社經地位不錯（許多軍公教背景），學生的數學學習情況尚可，在課堂中會主動提出自己的問題及想法。本研究的期間從 2019 年 9 月至 2020 年 1 月，共觀察 7 節課的數學探究教學（涵蓋 4 個單元）。資料蒐集以教學觀察為主（針對數學探究問題的教學進行觀察）、教師訪談為輔。

（二）數學探究問題的發展與內容

小婷老師在第 2 次說明會與其他老師討論後，決定在數量關係、圓周率 and 圓周長、圓面積、比與比值等四個單元進行問題設計和探究教學，因為她認為這些單元內容較具挑戰性，較能促進學生高層次的思考。表 1 是小婷老師教學時採用的挑戰題，共 7 題，其中 6 題參考網路資料來修改（1 題來自網路版教師手冊，09-02），1 題出自教科書（07-01）。7 題中有些是基本概念的應用，有些是觀察與察覺規律，也有生活的應用，解題時都需要觀察、思考與推理，具有一定程度的挑戰性，且由研究者和小婷老師經過 4 次共同討論後確定（9/6、9/19、11/1、11/25），討論的焦點在於問題內容合適性與實施方式。其中數量關係單元的兩個問題都分為數個子問題，一方面是擔心如果沒有子問題來「墊步」，學生可能無法探究出隱含的規律，且這兩題是剛開始進行探究教學所使用的問題，如果太難可能降低學生後續探究解題的意願；二是因為小婷老師的教學習慣，在面對複雜問題時，她通常會簡化問題來引導學生觀察其中的規律，進而發展解題相關的算式。由上來看，小婷老師進行數學探究教學前，針對教學時使用的問題、可能進行的方式等，都進行了事先的規劃與考量。小婷老師在探究教學中設計或使用的問題（表 1），符合 Bull et al. (2017) 提出探究教學中挑戰性問題設計的考量，包括所有問題都是高認知需求（需要連結概念理解和程序運用才能解題）、允許多重觀點切入、解題具有開放性、能顯示學生的思考等。7 題中有 5 題與生活連結（虛擬的真實問題，03-01、03-02、07-02、09-01、09-02），2 題純數學問題（幾何問題，06-01、07-01），7 題都偏屬於定義清楚的數學問題。

表 1
實施數學探究教學之單元、主題及問題

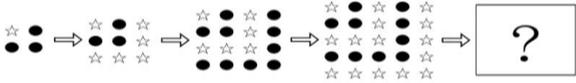
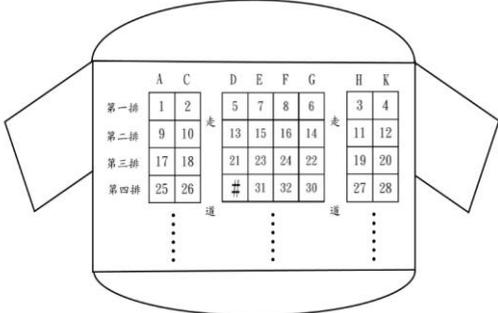
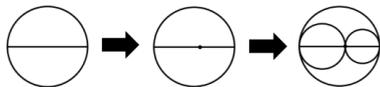
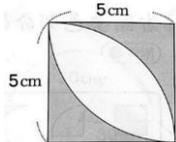
單元	探究主題	問題
<p>3. 數量關係</p>	<p>1. 透過觀察與探索，找出圖形的規律並解決問題</p> <p>2. 在具體情境中察覺數列的樣式</p>	<p>1. 下圖是媽媽用圓形和星形的珠子串出來的正方形圖案，請問：</p>  <p>(1)「問號」比上一個圖形增加多少個珠子？是什麼形狀的珠子？</p> <p>(2)「問號的下一張」比上一個圖形增加多少個珠子？是什麼形狀的珠子？</p> <p>(3)每邊排 1 顆串珠時哪一種珠子多？多幾顆？每邊排 2 顆串珠時哪一種珠子多？多幾顆？每邊排 3 顆串珠時呢？每邊排 20 顆串珠時呢？</p> <p>(4)請問「問號的下一張圖」全部的珠子（圓形和星形）共有幾顆？</p> <p>(5)當每邊排 20 顆串珠時總共有幾顆？圓形和星形各有幾顆？（請用數學算式呈現）</p> <p>2. 小豬和一位朋友打算在暑假時搭飛機去日本遊玩，飛機座位的號碼排列如下。他們的座位號碼是 123、124 號。</p>  <p>(1)觀察上圖，請問#為多少？</p> <p>(2)請問 49 號是靠窗還是靠走道？</p> <p>(3)請問他們坐在第幾排？</p> <p>(4)若小豬想坐靠走道的座位，請問他朋友該坐幾號的位置？</p> <p>(5)呈上題，當小豬就定位時，發現他正後方兩排的位置上竟然是他高中的數學老師，請問小豬的數學老師座位是幾號？</p>

表 1
實施數學探究教學之單元、主題及問題 (續)

		(6)小豬媽媽擔心女兒的安全，於是要飛去日本找小豬，而她設定了座位的條件：「第 10 排到第 12 排之間，號碼為單數，靠窗邊能欣賞風景」，請問小豬媽媽的座位號碼可能為多少？(把所有可能的答案列出來)
6. 圓周率 與 圓周長	認識圓周長的意義	1.老師畫了一個直徑為 20cm 的圓形，然後在直徑上隨意選一點，在這點的兩邊各畫一個圓，得出以下的圖案。請問：最大圓的圓周長度，以及其餘兩個圓圓周長度的和，相較之下哪一個較長？(圓周率為 3.14) 
7. 圓面積	1.運用圓面積的公式進行複合圖形面積的計算 2.運用圓面積的概念解決生活的問題	1.用 2 個 $\frac{1}{4}$ 圓扇形合起來拼成正方形，哪個部分會重疊？這兩個扇形重疊部分的面積大約是多少？  2.小明打算在女朋友生日的時候買一個 8 吋的披薩一起回家慶生，但是老闆做錯做成 4 吋的披薩，於是老闆為了補償小明，再多送他一個 4 吋的披薩。綜合上述，請問小明是「賺到」還是「吃虧」還是「沒賺到也沒吃虧」呢？為什麼？(一吋= 2.5 公分)(圓周率為 3.14)
9. 比、比值與成正比	運用比的概念解決生活的問題	1.聖誕節即將來臨，聖誕老公公打算將 6 公斤的糖果分給小紅、小藍、小黃三個小朋友。已知小紅和小藍的糖果重量比是 2:3，小黃比小藍少 1600 公克。請問小紅、小藍和小黃各有多少公克的糖果？ 2.下課時間，圈圈和點點兩個好朋友在操場聊天散步，已知圈圈走 3 步的時間，點點可以走 5 步；圈圈走 2 步的距離和點點走 3 步的距離一樣遠。如果兩人同時同地同方向走，當點點走到 400 公尺時，圈圈和點點隔多遠？

註：問題以「單元-題號」來編碼，如 07-01 表示圓面積單元中的第 1 題。

二、研究工具

(一) 觀察錄影

為了解小婷老師數學探究教學的情形，研究者透過教學觀察與錄影來紀錄，包含小婷老師在佈題後如何和學生互動？如何引導學生進行討論解題？解題後的發表與師生的互動等，作為資料分析及訪談的依據，了解其實施的歷程及歷程中關注的任務。

(二) 訪談大綱

本研究除了透過教學觀察錄影外，也透過訪談（半結構式訪談）來了解個案教師在過程中扮演的角色與任務、對學生學習可能的影響以及個人的感受等。訪談大綱如表 2。

表 2
教師訪談大綱

-
1. 您在進行數學探究的過程中扮演的角色是什麼？有哪些主要任務？
-
2. 您認為實施數學探究教學對學生的數學學習有何影響？
-
3. 您實施數學探究教學後有何感受？它適合在小學實施嗎？有什麼限制？
-

三、資料處理與分析

(一) 資料處理

本研究蒐集的資料為質性資料，包含教學觀察錄影與訪談錄音，來了解小婷老師數學探究教學的歷程及歷程中關注的任務。質性資料轉錄成文字後進行編碼，以「類別-日期」為編碼原則，且小婷老師的教學通常以數學問題為單位，在佈題後會引導學生進行小組討論與解題，所以觀察的資料以數學問題為單位，編碼時在日期後面加上單元、題碼。例如：Ob10040301 表示 10 月 4 日第三單元第 1 題的教學觀察錄影，且編碼的資料中包含了數學問題的內含與師生對話的內容；而訪談資料的編碼，則以 In0615 來呈現，表示 6 月 15 日的訪談資料。

(二) 資料分析

資料分析主要是進行歸類的分析：在教學觀察資料上，由於小婷老師採「佈題-小組解題與分享-總結」的教學方式，因此從各教學歷程中師生對話的內容為焦點，來分析與歸類教學歷程中經歷的階段，以及各階段教師關注的任務與焦點。例如在佈完數學問題後，從師生對話的內容來分析她如何引導或協助學生了解問題？學生解題或發表時，她和學生對話的內容焦點為何？等，並根據師生對話內容與焦點進行類別的命名、歸類和次數統計。在歸類過程對於各類別的命名，會參考過去相關研究的發現，作為對教學階段與教師關注任務命名時的參考。例如秦爾聰等人（2009）發現探究教學主要在引導學生完成解題的歷程中展開，一開始先喚起學生舊經驗與探究問題之間的關聯，再引導學生進行探究解題，並提供學生說明思考推理歷程與結果的機會，最後再回顧探究歷程獲得的知識等；Kuster et al.（2017）指出教師的探究教學會先聚焦在引發學生對於解題的思考與推理，再根據學生個別的解題思考與結果來建立全部學生的理解，最後將解題思考歷程和結果與數學符號進行連結等。也就是說，本研究針對教學觀察資料進行持續分析比較，過程中逐漸浮現資料的類別，再參考過去相關研究的發現來進行類別的命名。此外，為了讓教學歷程中教師任務的歸類更具可靠性，本研究採評分者信度進行檢定，由兩位具有分析經驗的數理教育研究所研究生進行試行分析，先以一個「佈題-解題」的師生對話內容進行分析與歸類，針對不一致的地方進行討論與修正後，再以另一次的「佈題-解題」內容進行分析，並採歐用生（2000）提出的評分者信度計算公式（ $p = \frac{2M}{M1+M2}$ ），M 為共同同意項目數，M1 和 M2 為各自歸類數）來計算信度。結果信度值為.92，顯示觀察資料的歸類具有可信性。訪談的資料不進行歸類分析，主要是了解小婷老師對於探究教學中關注任務的觀點，以了解其教學背後的思考，以及她對於探究教學的觀點與感受。本研究除了透過不同人員針對相同資料（觀察）進行分析外，也對不同資料（觀察與訪談）進行相互比對，以確認個案教師教學表現背後的思考。意即本研究透過三角校正的歷程來提升分析結果的可信性與可靠性。

肆、研究結果與討論

一、小婷老師數學探究教學之歷程

小婷老師在針對表 1 的問題進行教學時，基本上是採「佈題、小組解題與分享、總結」的流程來進行，和她平常採用的教學方式差別不大。以下從「佈題-解題-總結」等外在教學實施歷程中師生的對話互動，從互動內容來分析小

婷老師歷程中的教學焦點，並從教學焦點中得出其探究教學歷程中的不同階段與目的。

(一) 佈題後確認學生的理解與提供線索

在「圓周率與圓周長」單元中的問題為：

老師畫了一個直徑為 20cm 的圓形，然後在直徑上隨意選一點，在這點的兩邊各畫一個圓，得出以下的圖案。請問：最大圓的圓周長度，以及其餘兩個圓圓周長度的和，相較之下哪一個較長？（圓周率為 3.14）

小婷老師在佈題後，請學生先將題目看一遍，並問學生「看得懂題目嗎？...有困難一句一句來然後畫重點...」（Ob11080601）。佈題後確認學生是否理解題意與其所求，是小婷老師的教學習慣，也鼓勵學生提出不懂的地方，以便進一步說明。以上題為例，從視覺上來看，無法判斷大圓的圓周長和兩個小圓圓周長和的長短關係，且沒有提供兩個小圓直徑長度的資訊，會造成學生認為可能無法解題的錯覺。此時，小婷老師看到學生露出疑惑的表情時，她進行問題的重述並再次強調問題中與解題相關的敘述，來協助學生理解問題與察覺解題可能的線索：

T：直徑為 20 公分，我就會在這邊寫 20，接下來就不用看這句，然後在直徑上隨意選一點，隨意就是隨便，好我隨便選一點，它說什麼我做什麼，在這點的兩邊各畫一個圓，我幫你畫好了，好這是一個直徑 20 公分的圓...然後在這個點的兩邊各畫一個圓，得出以下的圖案就是這個圖案。到目前為止，對這個圖案有疑問的舉手。（Ob11080601，斜體部分為作者所加，表示小婷老師強調的內容）

雖然看起來小婷老師只是把問題重述一次，但其實強調解題思考的線索在於「直徑上的任一點的兩邊所畫的兩個小圓，其圓周長的和與大圓直徑的關係」。同時，她請學生上台將問題所求的關鍵標記出來（學生將大圓的圓周畫成橘色，兩個小圓的圓周畫成綠色），使學生更具焦在「同一條直徑上，大圓和兩個相接小圓圓周長」的觀察上。接著，小婷老師透過提問來引發學生進一步的探究與思考：

T：請問橘色這個跟綠色兩個，哪一個比較長？先想，先不要舉手，是 A 大圓比較長，還是 B 小圓比較長？...C 一樣長，還是 D 不知道。（底下有學生回應：大圓看起來比較大！也有學生說：兩個小圓，因為它有兩個啊！）...接下來你去討論到底哪一個，如果你確定是這個，去說服你那組的...（Ob11080601）

另外在「圓面積」單元中的問題為：

小明打算在女朋友生日的時候買一個 8 吋的披薩一起回家慶生，但是老闆做錯做成 4 吋的披薩，於是老闆為了補償小明，再多送他一個 4 吋的披薩。綜合上述，請問小明是「賺到」還是「吃虧」還是「沒賺到也沒吃虧」呢？為什麼？

雖然學生已經學過圓面積的公式，但佈題後她還是先確認學生是否了解題意？學生對於不清處的地方進行提問，小婷老師針對學生的提問來回應，並提供部分線索來引發學生的解題思考（如披薩的大小是指它的直徑）：

T：好，題目有問題的請舉手。

T：吋是一種長度單位，你記記看，長度單位你記過什麼？你要記住吋是另外一個長度的單位...它大概是 2 點多公分，然後有問題請舉手。

S：所以那個 8 吋的意思是指公分嗎？

T：8 吋的吋是指它的直徑，我們在講幾吋的蛋糕、幾吋的披薩，那個吋都是指直徑...它是一個長度，還有問題嗎？（Ob11250702，斜體部分為作者所加，表示小婷老師強調的內容）

從規律問題的設計中（03-01），也看出小婷老師提供線索協助學生解題思考的意圖。例如「每邊排 20 顆串珠時，哪一種珠子多？多幾顆？」的問題，她先從每邊排 1 顆、2 顆、3 顆時的排列結果開始問起，讓學生從數量少的排列中發現排列的規律，再發展出解題的策略（Ob10010301）。從上述的例子來看，小婷老師佈題後主要關注的是學生對於題意的理解，包括以簡化問題的方式（有時搭配圖形表徵）、針對學生不清楚的概念進行說明、請學生回憶先備知識或概念來進行連結等，以確認學生解題前對於問題的理解。從師生對話的內容來看，可以了解此階段小婷老師的教學焦點在於引導學生進行「連結」和「理解」，透過新舊知識的連結、簡化問題與圖形表徵、提供線索等，使學生「連結」先備知識與經驗，以「理解」解題的焦點，並進一步思考可能的解題方法（向）。

（二）學生解題／分享時的要求說明並協助學生釐清與完成探究解題

確認學生理解題意後，學生開始進行小組討論與解題，並將結果紀錄在小白板上。小組討論時小婷老師會到各組巡視，接著要求各組推派一位代表上台分享並說明該組解題思考的歷程與結果，並請其他同學專心聆聽。以「圓面積」的披薩問題為例，學生在發表解題思考的過程中，當解題思考與策略符合一般的做法時（例如精確地算出一個直徑 8 吋的圓面積、兩個直徑 4 吋圓面積的和

專論

後再進行比較)，或提供多元的思考與策略時（例如透過畫圖得出結果），小婷老師會請學生進行解題歷程的說明，若學生說明清楚則會表示肯定與認同：

S1：...先算出 $2.5 \text{ 公分} \times 8 = 20...$ ，然後再用 $10 \times 10 \times 3.14 = 314$ ，就是一整個圓的面積，然後我們再算小的...變成 $78.5...78.5 \times 2 = 157$ ， $157 < 314...$ 結果為小明吃虧。

T：她講的很清楚，好！

S2：...先算出它的直徑，然後...我們這組在旁邊畫了 8 吋與 4 吋披薩的圖。

T：他這個圖非常棒！你看這是一個 8 吋的披薩，是不是直徑是 8 吋？然後送直徑 4 吋，4 吋的圓畫起來剛好是大圓的半徑（Ob11250702）

S2 那一組雖然沒有精確地算出一個 8 吋披薩和 2 個 4 吋披薩合起來面積的差異，但從直徑大小的關係中發現可以用畫圖來得出結果（因為直徑是 8 和 4，所以大圓內可以畫出兩個小圓），這顯示了學生進行問題探究的歷程和結果。

但是當學生提出不同於一般解題的想法時，例如用正方形的邊長變化後面積的改變來類推到圓形時（如 S3），小婷老師同樣先請學生說明他們的想法（包括請其他學生來說明），並針對學生的推理思考進行提問，以釐清學生解題思考的關鍵並增進其他學生的理解：

S3：就把圓形看成正方形。正方形邊長 3 公分，假如你把它邊長都 $\times 2$ 的話就變成更大了，這個正方形類似圓形，邊長為 3 公分的正方形 $\times 2$ 會等於四個邊長為 3 公分的正方形。

S4：我懂他的意思。

T：那是什麼意思？

S4：（將 S3 的解題做法再敘述一次）就是這是它的邊長嘛，這題它是說因為做成 4 吋的，所以又再多給他一份，所以就把它當成正方形的邊長 3 公分就 $\times 2$ ，可是它出來的時候會變成 4 個。

T：你們從以前在學到現在有沒有發現邊長跟面積的關係（Ob11250702）

上述的例子同樣可以看出學生探究推理的歷程。S3 那一組學生從過去舊經驗出發，以正方形為例，了解當正方形邊長改變時其面積的變化（邊長變 2 倍時面積變 4 倍），並察覺邊長與面積的關係。所以他們將圓形的披薩以正方形來思考，同樣從邊長與面積的關係去推理，而得出 8 吋披薩的大小等於 4 個 4 吋的披薩，進而得出答案。學生解題的分享，展現他們探究解題的歷程，也說明他們的推理思考的方法。

不過當小婷老師巡視時，若發現學生混淆了問題中的數量關係，導致無法順利解題時，她除了以提問來了解學生的思考外，也提供部分提示使學生能釐清問題中的數量關係，以便後續的思考與解題。例如「比、比值與成正比」的問題為：「聖誕節即將來臨，聖誕老公公打算將 6 公斤的糖果分給小紅、小藍、小黃三個小朋友。已知小紅和小藍的糖果重量比是 2：3，小黃比小藍少 1600 公克。請問小紅、小藍和小黃各有多少公克的糖果？」，小婷老師和學生的對話如下：

T：先看題目。請問一下，哪裡看不懂？（小組討論中）

T：...你真的知道自己在算什麼的舉手？

S：他們兩個加起來等於 5...

T：誰加起來等於 5？

S：2 和 3 加起來是 5，所以 $5 \div 6000 = \dots$

T：好，有問題。第一個提示，請你嘗試用線段圖去畫出小紅跟小藍的糖果重量，看看這樣你能不能解得出來？（Ob12250901）

雖然小婷老師提示用畫線段圖的方式來釐清問題中的數量關係，但有些學生仍然無法順利地畫出。此時她以提問的方式請無法畫出、畫出部分或全部線段圖的學生來說明其思考歷程，並根據學生畫的圖和解題的思考，來進一步協助學生釐清問題中的數量關係，並列出相對應的算式：

S1：它沒有辦法畫（指小黃）

S2：如果你要分成這樣子他有 6 份，你 $6000 \div 6 = \dots$

T：為什麼沒辦法畫...S3 你怎麼畫？

S3：（改畫學生原圖）

T：為什麼這樣？我不懂他的意思

S3：假設這樣，你就可以說這邊是 1600，然後這樣子就...

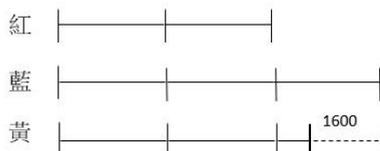
T：我把他重整理一下，小黃...是比小藍少 1600 對不對？小藍是不是三段，他比他少 1600...三段倒扣回來 1600...那這樣子有沒有辦法算？

S：有。

（老師巡視小組討論中）

專論

T：來，S4 怎麼去假設這些？他做了一個很重要的工作。



S4： (改畫學生原圖)

T：看得到這個動作嗎...他設它為一個未知數，請問小紅有幾個 x ？

S：兩個。

T：...請問小藍是多少？

S： $3x$ 。

T：3 個 x ，重點在這裡（小黃）。

S： $3x-1600$ 。（Ob12250901，斜體部分為作者所加）

無論學生在解題時是否遭遇困難，小婷老師都會要求學生說明其思考的歷程，並以學生的解題思考為基礎，包括正確與不正確的、部分與完整的，透過提問與學生的說明，逐步地協助學生完成探究解題。這樣的情形也發生在飛機座位問題的規律尋找上（Ob10040302）。從上述師生互動對話的內容來看，小婷老師教學的焦點主要在協助學生制定或發展出合適的解題方法，若學生無法達成時（例如變項之間的關係混淆），她會要求學生回頭檢視自己的解法是否符合題目的要求，並適時地提供提示與協助（例如請學生畫線段圖來釐清數量關係）；且無論學生採用的方法與推理是「一般」或「另類」的，她都會給予肯定，甚至引導學生進行一般化的推理，例如推理邊長（變化）與面積（變化）的關係。從上述的教學焦點來看，可以了解此階段主要的意圖在於協助學生完成「探究解題」。

（三）學生解題後進行整合與類推

在各組學生上台分享各自的解題思考後，小婷老師會歸納各組的解法，並將學生解題思考的歷程依序再說明一次，並得出進一步的結論，甚至得出可以類推到結構相同問題的一般性解法。例如在披薩問題中，小婷老師整合各組的思考歷程，說明大部分組別都從面積計算的角度切入，透過圓面積公式分別算出 8 吋和 2 個 4 吋披薩面積的大小後來得出答案；但也有同學從邊長與面積的關係去思考，並進一步延續學生的思考，得出可以類推的一般性解法，甚至引導學生類推到邊長與體積的關係，例如：

T：正方形跟圓形有什麼關係？獲得了一個結論，正方形面積=邊長 \times 邊長，當你邊長變成兩倍大的時候...那面積呢？兩倍嗎？

S6：變 4 倍。

T：為什麼？

S6：兩個兩倍。

T：你們進入了一個結論的概念非常好，圓面積的公式是半徑 \times 半徑 $\times 3.14$ ，我們先想 4 吋變 8 吋，直徑變兩倍半徑也變成兩倍，請問它的面積會變幾倍？

S7：4 倍。

T：甚至以後你可以知道一件事情，請問大家正方形的體積怎麼算？

S8：邊長 \times 寬 \times 高。

T：因為正方形每個邊都一樣，所以（體積）也就是邊長 \times 邊長 \times 邊長，那請問如果邊長變兩倍，體積變幾倍？

S8：6 倍。

T：6 倍？

S8：8 倍。

T：...不是表面積...，所以變成 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 倍，所以你可以發現邊長、面積、體積是一層一層的關係...（Ob11250702，斜體部分為作者所加，表示小婷老師指涉的概念）

除了整合與進行類推外，小婷老師也會引導學生對自己的解法進行回顧與檢視，看是否有不必要的計算或是可以省略的部份（例如是否需要精確計算出面積），使學生可以採用更精簡或有效的解法：

T：那我最好奇的一件事，大家都把 8 吋換成 20 公分，那為什麼一定要換？吋本身就是一個長度單位，如果我給你的是 8 公尺，你也會把它換成分公嗎？

S：不會。

T：...半徑 \times 半徑 $\times 3.14$...吋從頭到尾只有一個單位，長度單位都是吋，所以不用特別換成分公。（Ob11250702）

當各組學生完成解題分享後，小婷老師聚焦在引導學生觀察各組解法的異同，針對共同性的部分，包括解題的方法與歷程，來檢視解法是否能夠更精簡（如是否需要把直徑的單位換成分公）？也針對差異性的部分，包括解題的思考與推理（如實際算出面積或比較直徑長度的關係來解題），來引導學生延伸思考解題相關變項之間的關係（如邊長和面積），得出一般性的解法。由此來

看，這個階段小婷老師意圖透過解題思考和推理歷程的回顧，進一步將解法精緻化或一般化，以便學生後續解題時的推理和應用。

(四) 小結：歷經連結理解、探究解題、精緻／一般化三階段的數學探究教學歷程

從外在教學實施的歷程來看，小婷老師的數學探究教學從呈現挑戰題開始，歷經確認理解與提供線索、學生的解題分享、解題後的整合與歸納等階段，各階段的教學焦點在於引導與協助學生進行連結理解、探究解題以及精緻／一般化解法。各階段不同的教學焦點，主要是協助學生完成解題所致，包括由於問題的挑戰性或複雜性，所以首先要協助與確認學生理解題意，透過新舊知識的連結、不同表徵或簡化問題來提供線索，幫助學生「理解題意」及問題所求；理解題意之後便聚焦在探究解題，透過提問、對話、提供反思與線索等，協助學生發展出解題方法，從要求說明中讓學生發展與檢視解題思考推理的歷程，以成功「完成解題」；當解題完成後，整合並引導學生回顧解題歷程，來精緻化／一般化原有的解法，使學生能進行後續的「推理與應用」。由於小婷老師數學探究教學的歷程，是在協助學生完成解題的歷程中展開，包括協助理解題意、發展解題方法並完成解題、進行解題回顧等，所以雖然探究的問題有生活連結和純數學的問題、較複雜文字敘述和單純的圖形問題、包含子問題的題組型和非題組型問題等不同，但教學歷程大致相同，這呼應了 Polya (1945) 提出完成解題需要的歷程。但整個教學歷程並非直線式的，尤其當問題中的數量關係較容易混淆時，如 09-01 的比例問題，使學生無法順利發展出合適的解題方法時，她會提供線索和提示來協助學生釐清問題中的數量關係，以便完成後續的列式與解題。小婷老師教學實施的歷程與教學焦點呼應了 Silver (1997) 對於數學探究教學包含佈題與解題的主張，也和秦爾聰等人 (2009)、Allmond et al. (2010) 的研究發現相近，也部分呼應了 Kuster et al. (2017) 的教學原則。進一步從不同實施歷程中的教學焦點來看，小婷老師的數學探究教學其實歷經了包括連結理解、探究解題、精緻／一般化三個階段，每個階段都有著不同的教學意圖與目的。小婷老師喜歡這樣的教學方式，因為可以了解學生的想法，而且學生可以主動投入並了解不同的解題思考，唯一的限制是教學時間不足，而問題的設計是關鍵與挑戰：

我喜歡這種教學模式...它不是我一直說，然後學生就坐在那邊一直聽... (解法) 是由他們自己討論出來的，他會經由討論看到別人怎麼想這題...看到別人的思考過程...它的限制就是時間，還有題目的選擇真的是關鍵 (In0615)

二、小婷老師數學探究教學中關注的任務

從小婷老師在不同教學階段關注的焦點與師生對話內容來看，參考過去相關研究指出探究教學中教師可能關注任務的內容來進行類別的命名，小婷老師實施數學探究教學時關注的任務有「提供線索／確認」(Hint and Confirm, HC)、「要求說明／釐清」(Explain and Clarify, EC)、「順序化」(Sequencing, S)。其中「提供線索／確認」是指提供解題所需的相關資訊、表徵、舊經驗等，協助學生理解問題與進行後續的探究解題，提供線索的同時也會確認學生是否理解題意與所求。此任務相當於 Allmond et al. (2010) 提出的發現解題連結的任務；「要求說明／釐清」是指學生進行探究解題中／後，要求學生說明其解題思考推理的歷程，並協助釐清使學生發展解題的推理並完成解題。此任務相當於秦爾聰等人 (2009) 提出的提供說明探究歷程與結果的任務；「順序化」是指各組學生解題分享後，引導學生回顧整個解題的歷程，從解題思考歷程先後順序的釐清與歸納中，得出可應用的一般性解法。此任務相當於 Kuster et al. (2017) 提出的連結數學符號的任務。表 3 為每個問題實施時歸類的結果。從表 3 來看，小婷老師在每一個問題實施歷程中都有執行這三個任務，其中以 EC 佔的比例最高，佔全部任務的 57.97%，顯示小婷老師在探究教學中，最關注學生在探究解題中／後，對於解題思考推理歷程的說明與釐清；HC 和 S 佔的比例接近，各自佔全部任務的 23.18% 和 18.84%，顯示由於問題的挑戰性，使小婷老師在佈題後會提供線索，協助學生進行新舊經驗的連結，在理解題意及其所求的前提下來進行探究解題，所以 HC 所佔的比例居次；當各組完成解題分享後，小婷老師會引導學生回顧解題思考的歷程，並將歷程進行依序的說明，所以每一題完成前都至少進行一次 S 的任務。其中 09-01 和 09-02 對學生而言是比較困難的比例問題，有多重的數量關係或結合速率的概念，使學生較難理解問題中的數量關係，所以出現較多的 HC；而 03-01 和 03-02 出現較多的 EC，主要是因為這兩題有較多的子問題（各有 5 題和 6 題）；另外 03-01 有整體珠子數量的變化、不同形狀珠子數量的變化等規律，也使得小婷老師在這一題進行較多 S 的任務。

表 3

小婷老師在各挑戰題中出現的教學任務次數統計表

問題 (單元-題號)	任務			合計
	HC	EC	S	
03-01	2	11	5	18
03-02	2	8	2	12
06-01	1	5	1	7
07-01	2	6	1	9
07-02	2	5	2	9
09-01	3	3	1	7
09-02	4	2	1	7
合計	16	40	13	69
	23.18%	57.97%	18.84%	100%

註：比例因為四捨五入的結果而總和不足 100%。

若從教學歷程中的階段來看，小婷老師在不同階段關注的教學任務有明顯的不同（表 4）：在連結理解階段，她關注的任務在於 HC，希望藉由線索的提供來建立連結，以確認學生在題意理解前提下進行解題；在探究解題階段，她的任務則聚焦在 EC（38/46，82.61%），但當學生解題遇到困難時，尤其是數量關係複雜不容易釐清的問題（例如 09-01 和 09-02），造成學生解題時的混淆，她也會執行 HC 來協助學生（8/46，17.39%）發展並完成解題；在精緻／一般化階段，她關注的任務是 S（13/15，86.67%），偶爾會執行 EC（2/15，13.33%）。

表 4

小婷老師教學歷程中各階段出現的教學任務次數統計表

問題 (單元-題號)	連結理解			探究解題			精緻／一般化		
	HC	EC	S	HC	EC	S	HC	EC	S
03-01	2	-	-	-	10	-	-	1	5
03-02	2	-	-	-	7	-	-	1	2
06-01	1	-	-	-	5	-	-	-	1
07-01	-	-	-	2	6	-	-	-	1
07-02	2	-	-	-	5	-	-	-	2
09-01	1	-	-	2	3	-	-	-	1
09-02	-	-	-	4	2	-	-	-	1
合計	8	0	0	8	38	0	0	2	13

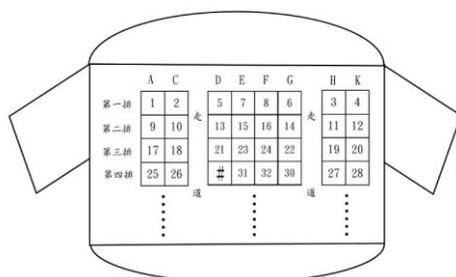
註：「-」表示未出現該項教學任務。

以下呈現小婷老師各教學階段關注的任務、師生間的對話、及小婷老師的觀點，以了解她在各教學階段中意圖達成的教學目的。

(一) 連結理解階段聚焦在提供線索／確認來建立理解

以「數量關係」單元中的飛機座位問題為例(03-02)，小婷老師從生活中搭飛機找座位的情境出發，提供解題的重要線索，例如搭飛機想要挑選座位，就必須要知道座位編號的規律，來引導學生觀察圖中座位編號的安排，以提問的方式來讓學生察覺座位編號編排中所隱含的規律(如前後兩個數字都差8，因為一排有8個座位)，以便讓學生理解與察覺解題的關鍵後進行後續的解題：

T：有兩位先生他們暑假的時候要搭飛機去日本...飛機座位的安排如這張，它有什麼規律？如果你想要挑位置你要知道它的規律嘛，它的規律性是什麼？



S1：是每排有8個。

T：每排有8個，排在哪裡？

S1：橫的。

T：每一排都是8個，非常好，還有嗎？

S2：每個數都相差8。

T：每個數都相差8，為什麼每一個數都相差8？

S2：因為每一排有8個。(Ob10040302)

上述對話看起來像在確認一排座位的數量，以及前後數字的相差，但實際的目的在於引導學生發現並思考可能存在的規律。除了前後座位數字相差的規律外，小婷老師也請學生思考是否還有其他的規律存在？例如，如何可以知道座位40號所在的位置？在提供線索的任務中，小婷老師經常透過提問的方式，來使學生理解題意及其所求。例如，在上述飛機座位問題中，透過提問來引導學生發現座位安排的規律(Ob10040302)；在披薩大小的問題(07-02)、聖誕老公公分糖果的問題中(09-01)，透過提問來協助學生釐清對於題意不清楚

的地方 (Ob11250702, Ob12250901)；在大小圓的圓周長問題中 (06-01)，也透過提問來請學生思考大圓和該圓中兩個小圓的周長哪一個比較長？尤其當無法透過感官「看出來」時要如何解決 (Ob11080601)？除了提問外，複習與問題相關的舊經驗 (Ob12250902)、簡化問題 (Ob11080601) 等，都常出現在小婷老師提供線索的任務中。小婷老師認為提供線索後的理解有助於學生後續進行解題的探究：

有時候那個觀念(概念)是他原本已經知道的，只是還有一個新的名詞(指學生以為是新的概念)，所以我覺得一開始是讓他們很清楚的知道這個東西跟以往的聯結是什麼，比如說比例...，看起來好像是一個新的，可是其實它是一個舊的東西，只是老師要搭起這個橋樑，讓他們知道說其實我們學過它，讓他們知道以後，接下來應該就是看他們怎麼摸索，然後適時的給他們一些提點而已... (In0615)

(二) 探究解題階段關注要求說明／釐清來發展解題的推理與思考

進入各組解題後，小婷老師的教學任務便聚焦在要求說明上，主要是邀請各組上台分享其解題思考的歷程，包括如何制定解題方法及發展解題的推理和策略。以「數量關係」單元中的珠子問題 (03-01) 為例，主要讓學生從正方形排列的圖案中，發現全部珠子和不同形狀 (圓形和星形) 珠子數量變化的情形。當各組完成解題後，小婷老師特別請某組學生來說明他們「簡潔」的解法，除了讓學生說明他們探究推理與制定解法的歷程，也讓所有學生了解到不同推理思考的方法：

T：這組很乾脆全部都是數字，誰要來說明？

S：這邊邊長 1 個、2 個，到這邊邊長 5 個，所以我們知道接下來是 6 個，所以我們就用 $6 \times 6 - 5 \times 5$ 直接相減，答案就出來了。(Ob10010301)

當珠子問題進入到「每邊排 20 顆時總共有幾顆？圓形和星形各有幾顆？」時，小婷老師請其中一組學生說明他們解題思考的歷程與結果：

S：...總數是 400 顆 (20×20)...我們...先切一半...邊長 1 顆的時候，星星會比圓形多 1 顆...邊長兩顆的時候圓形就會比星形多兩顆...以這個規律，我們算出來 20 排的時候圓形就會比星形多 20 顆，然後因為它們都是 200 顆，所以一個-10，一個+10。

T：為什麼要-10，+10？

S：因為它相差 20 顆...如果兩個都減 20 的話，會變成相差 40 顆，所以要先把它 $\div 2$ ，變 10 顆，然後一個 190，一個 210。(Ob10020301)

但另一組卻發展出不同的解題思考與推理。他們知道當每邊 20 顆串珠時，兩種不同的串珠數量相差 20 顆，但他們寫出的 $20 \div 2$ 卻是代表「不同形狀的串珠各有 10 組」，之後寫出「 $1+5+9+13+17+21+25+29+33+37=190$ 」的算式來算出星星形狀串珠的數量，再用 $400-190=210$ 來得出圓形串珠的數量 (Ob10020301)。學生上台說明該組解題思考推理的歷程時，小婷老師要求其他學生注意聽，有時會請其他學生對台上發表的思考和推理來進行評論。例如在「圓面積」單元的葉子面積問題中 (07-01)，當某組學生上台說明他們的思考與策略後 (策略為：正方形減掉扇形會等於旁邊兩個綠色的，然後正方形再剪掉旁邊兩個綠色的就等於這個扇形，然後因為它有重疊，所以扇形要 $\times 2$)，小婷老師問：「你同意正方形 $-1/4$ 圓扇形等於綠色這塊 $\times 2$ 嗎?」。有學生表示不同意，小婷老師就請她說明不同意的理由 (Ob11200701)；如果發現學生的解法特殊，例如在聖誕節的糖果問題中，題目呈現的是小紅和小藍兩人糖果的重量比是 2:3，但是一位同學用線段 (畫圖) 來表示他們的重量關係 (假設小紅有 $2x$ 的糖果重量，那小藍的糖果重量就是 $3x$)，小婷老師便請她上台說明如何透過線段的表徵來制定出解題方法 (Ob12250901)。當學生解題過程中遇到混淆或不清楚的情況時，她會提供線索來協助學生發展解題的思考與策略 (例如在 07-01、09-01、09-02 等，占了 17.39%)，例如在 09-02 問題中，當學生無法釐清數量關係來發展解題方法時，小婷老師除了向學生說明題目涉及多重數學概念的複雜性外，也從題目中的文字敘述來引導學生理解與釐清，以便學生進行後續的列式與解題：

T: ...有比的概念...甚至還牽扯到速率...確實很複雜...假設兩個人一起走了 x 秒...先假設圈圈走了 $3x$ 步，然後同時間點點會走 $5x$...為什麼?根據這句話 (圈圈走 3 步的時間，點點可以走 5 步)寫出的...你學過了比，圈圈走 $3x$ 步，比如說圈圈走 6 步...點點走幾步?

S: $5x$ 。

T: ...你學過了比，圈圈走 $3x$ 步，比如說圈圈走 6 步...點點走幾步?

S: 10 步。(Ob12260902)

在探究解題階段小婷老師主要關注的任務是要求說明，藉此讓學生了解各組推理思考的歷程與結果，以增進學生的理解，同時也讓了她了解學生解題的思考與可能的迷思。

...由他們說，他們說越多越能讓我我知道說迷思在哪裡或是他的想法在哪裡，或者是有時候學生會用他們的話去讓其他人懂...有時候學生來解釋這個觀念的角度甚至比我們好...他會經由討論看到別人怎麼想這題...看到別人的思考過程 (In0615)

(三) 精緻／一般化階段透過順序化來使學生推理應用

當完成解題的分享和說明後，小婷老師會回顧各組的解題思考歷程，如果有不同的解題思考時，她也透過順序化的任務來讓大家了解多元的解題思考和策略。例如在葉子面積問題中（07-01），小婷老師對學生四種不同的解法進行說明，讓學生了解不同解題思考的脈絡，並選擇自己能理解的方法作為後續的應用：

T：...第一種方法先找到這塊綠色，用整個正方形 $-1/4$ 圓就算出這塊綠色，算出之後我要扣掉兩塊才知道眼睛是多少？所以把這個塊綠色 $\times 2$ 就等於旁邊外圍...如果它要求眼睛...還要正方形去扣掉外圍...再來第二種算法， $1/4$ 圓 $-$ 三角形變成什麼？一半眼睛，一半眼睛 $\times 2$ 就等於大眼睛；第三種它也是先把這塊綠色畫斜線，斜線怎麼找？正方形 $-1/4$ 圓就等於斜線，之後再去找一個扇形，扇形再扣掉斜線就等於眼睛；最後一種，兩個 $1/4$ 圓扇形加在一起就重複了，然後再減一個正方形。這四種都可以，請你去想一個你比較能接受的。（Ob11210701）

小婷老師以順序化來回顧學生解題思考的歷程後，往往進一步延伸其解題思考和方法，推論到相同結構問題的解決上。例如在珠子問題（03-01）中，以順序化來回顧學生得出的規律後，將問題延伸為：「按照题目的規律，如果我排到50個的時候，每一排都排50個珠子的時候，請問總數是多少？星星和圓圈的珠子誰多？為什麼？他們數量相差多少？」（Ob10020301）；當針對披薩大小問題（07-02）的解法進行回顧與順序化後，小婷老師進一步延伸到面積與邊長的關係，並以學生採用的正方形概念來說明，得出面積的變化（倍數）等於邊長 \times 邊長，甚至還類推到體積的變化等於邊長 \times 邊長 \times 邊長（Ob11250702）。意即，小婷老師進行順序化的任務，其目的除了讓學生了解整個探究思考的歷程外，也讓學生將得出的解法推理到類似情境或結構問題的解決中。她認為透過回顧與順序化學生的思考，可以總結解題歷程的焦點，且對中下程度學生的學習有幫助：

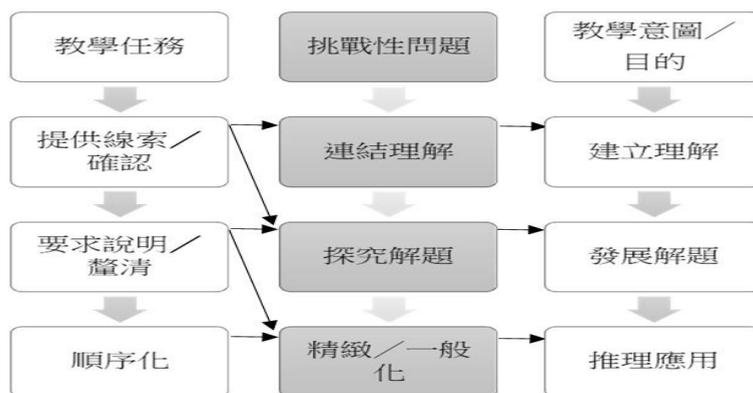
...會把剛才引導的經過及學生發表內容歸納整理，主要的目的在於總結重點，讓學生可以聚焦，幫助中下程度學生的學習...（In0615）

從以上小婷老師在各階段關注的教學任務、師生間的對話來看，可以了解她在各階段主要達成的教學目的分別是：建立理解、發展解題、推理應用。

三、討論：數學探究教學的歷程與任務—可能的架構

小婷老師數學探究教學的實施，主要在協助學生完成解題的歷程中展開：呈現挑戰性問題後，進入連結理解階段，此時的教學任務全部聚焦在「提供線索／確認」，透過複習舊經驗、簡化問題、提供圖形表徵來建立學生對於問題的理解，以提問的方式來和學生互動，協助學生進行後續的解題思考。從小婷老師在此階段的教學任務來看，其主要教學意圖／目的在於「建立理解」，建立學生對於解題相關訊息的理解；接著進入探究解題階段，此時關注的任務是「要求說明／釐清」，釐清學生探究思考的推理歷程，協助學生制定與發展解題方法與推理。由此階段關注的任務來看，可以推知其教學意圖／目的是協助學生「發展解題」，包括制訂與發展出解題的方法與推理；最後進入精緻／一般化階段，此時主要任務在於「順序化」整個解題思考的歷程與結果，帶著學生回顧解題思考推理的歷程，藉著精緻化或一般化問題的解法，使學生進行後續的推理與應用。由此可知，此階段教師的教學意圖／目的，是希望學生將學習到的解法「推理應用」到相同結構問題的解決上。小婷老師數學探究教學歷程中經歷的階段、關注的任務、教學意圖／目的如圖 1。

圖 1
小婷老師實施數學探究教學的歷程與任務圖



從 Kuster et al. (2017) 提出的數學探究教學原則來看，小婷老師在連結理解階段透過提供線索來「引發」學生對於挑戰題的思考與新舊經驗的連結；在探究解題階段透過要求說明來「引發」學生說明探究推理思考的歷程，同時根據學生的解法，透過要求學生說明來「發展」全班學生共同的理解；而在精緻／一般化階段，透過回顧與順序化學生思考推理的歷程，從學生的解題表現中

來「建立」推理的歷程，並且將此歷程「連結」到數學的符號，以便後續的應用。因此，小婷老師在探究教學中關注的任務，大致呼應 Kuster et al. (2017) 歸納的「引發推理」、「發展理解」、「建立學生的貢獻」、「連結符號」的探究教學原則；從 Allmond et al. (2010) 對數學探究教學歷程的主張來看，小婷老師在連結理解階段以提供線索來讓學生「發現」新舊經驗之間的關聯，進而建立學生對於問題的理解；在探究解題階段透過要求學生說明，來協助他們「制定」解題的方法「發展」解題的推理，同時學生也為自己的解法和思考推理進行「辯護」。小婷老師的探究教學也大致符合 Allmond et al. (2010) 的主張；再對照秦爾聰等人 (2009) 提出的教學架構，發現小婷老師的探究教學，同樣在佈題-解題歷程中展開，且歷經探究解題、溝通分享解題推理、反思與精緻化等歷程。

整體來看，小婷老師探究教學的歷程和關注的任務，大致與國內外相關研究的結果相呼應，且如 Silver (1997) 的觀點，主要在協助學生完成解題的任務，包括協助理解問題、擬定／執行計畫、解題回顧。這主要是因為數學的教與學是以問題為核心 (Stein et al., 2007) 所突顯出的探究教學特色。不過若從佈題的內容來看，小婷老師採用的探究問題是偏向定義清楚的問題，和 Allmond et al. (2010)、Makar (2012) 主張應提供與生活連結的問題有所不同，因為生活連結的真實性問題通常是非結構且定義模糊的問題。例如 Makar (2012) 以「哪一個品牌的口香糖最好」的問題為例，來說明教師引導學生進行探究解題前，可能需要引導與協助學生先定義問題，例如「何謂最好？」、「可以用甚麼證據來作為支持？」等，問題定義清楚後才能進行解題方法的制訂與執行。意即，問題的真實與結構程度，會影響教師引導學生探究解題的歷程，雖然還是以解題為導向，但歷程中可能會增加協助學生定義問題、將生活問題轉換成數學問題等。教學歷程的不同，也可能連帶影響教師的教學任務。佈題以真實生活問題為主引發的探究教學歷程與任務為何？值得後續的探討，但也需思考在教師關注課程的進度與有限的教學時間脈絡下 (徐偉民, 2017)，能否在數學課中實施完全以真實生活問題為主的探究教學？再從實施過程中教師扮演的角色和介入程度來看，小婷老師的教學偏向指導式 (李淑慧, 2000) 和結構式的探究教學 (Hansen, 2002)，過程中教師主導和介入的程度較高。本研究從小婷老師協助學生完成探究解題的歷程中，提出一個數學探究教學實施歷程、教學任務與其目的的架構 (圖 1)，供學校教師教學實施的參考，但能否反映出探究教學的多樣面貌？或是代表臺灣教學現場可以實施的架構？仍待後續研究者持續探討。

伍、結論與建議

一、結論

本研究採個案研究法，探討一位主修數學教育的國小資深教師數學探究教學實施的歷程與任務。結果發現在教學實施歷程上，個案教師呈現挑戰題後，便進入連結理解階段，透過線索的提供與提問，來引發學生對問題的思考，建立對於問題的理解；之後進入探究解題階段，透過要求學生說明與釐清，引導學生制定解法與發展解題的思考推理，並將思考推理的歷程進行分享與討論；最後進入精緻／一般化階段，教師引導學生回顧並順序化整體解題思考的歷程，以得出一般化的解法，以便後續的推理與應用。而在教師關注的任務上，整體上個案教師比較關注要求說明／釐清的任務，但在不同階段有不同關注的任務：連結理解階段完全聚焦在提供線索／確認的任務上；探究解題階段則主要關注要求說明／釐清，但偶爾也會提供線索來協助學生解題；精緻／一般化階段是以順序化為主，偶爾也會要求學生說明整體解題思考的歷程。本研究根據研究結果提出數學探究教學實施的可能架構，作為後續持續探討或推廣的基礎。

二、建議

本研究根據研究發現提出以下建議。首先，雖然本研究根據特定背景及任教特定年級的個案教師，得出數學探究教學實施的參考架構（圖 1），補足過去相關研究較不明確之處。但此架構仍需有更多的檢驗，包括應用在不同年級或不同背景的教師，才能建立數學探究教學的特色，作為後續推廣的基礎；其次，本研究發現個案教師透過提供線索來建立學生的連結理解，透過要求說明來協助學生發展推理並完成解題，也透過順序化來使學生進行一般化的推理，這樣的教學實施，「合理地猜測」對學生的數學學習有正面的影響，但是否能提升學生的解題表現？能否讓學生「體會」到探究學習數學的價值？值得進一步探討；最後，本研究發現個案教師在實施歷程中，經常以提問的方式來引發學生的連結與思考，教師要如何提問才能夠引發學生更多的探究思考？不同主題的挑戰題，如數與量和幾何問題，是否需要不同的提問方式或類型？提問的方式與類型對學生進行探究的成效如何？仍需更多的研究來理解。畢竟，除數學問題的挑戰程度外，教師的提問是影響學生進行探究的關鍵。

致謝

本研究感謝科技部提供經費協助（計畫編號：MOST 109-2511-H-153-003-MY2），以及小婷老師與其班上學生的參與，才使本研究得以完成。本文的論點為作者所有，不代表科技部。

參考文獻

- 李淑慧（2000）。**探究教學法**。教育大辭書 [Online]。 <http://terms.naer.edu.tw/detail/1309716/>（2021-09-17）
- 林勇吉、秦爾聰、段曉林（2014）。數學探究之意義初探與教學設計實例。**臺灣數學教師**，**35**（2），1-18。
- 紀雅芳、溫嫩純（2008）。5E學習環融入數學探究教學對國中生學習動機之影響。**台灣數學教師電子期刊**，**13**，1-12。
- 徐偉民（2017）。小學數學教科書使用之探究。**教科書研究**，**10**（2），99-132。
[https://doi.org/10.6481/JTR.201708_10\(2\).04](https://doi.org/10.6481/JTR.201708_10(2).04)
- 秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林（2009）。數學探究教學對數學解題能力提升之個案研究。**科學教育研究與發展季刊**，**55**，83-1116。
- 教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。教育部。
- 教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。教育部。
- 歐用生（2000）。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發（主編），**教育研究法**（頁229-254）。師大書苑。
- Allmond, S., Wells, J., & Makar, K. (2010). *Thinking through mathematics: Engaging students with inquiry-based learning (Books 1-3)*. Curriculum Press.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindset: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 37-55.
- Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Heinemann.

- Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 302-324.
- Fielding-wells, J., O'brien, M., & Makar, K. (2017). Using expectancy-value theory to explore aspects of motivation and engagement in inquiry-based learning in primary mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 29(2), 237-254.
- Haury, D. (1993). *Teaching science through inquiry*.
<http://www.ericdigests.org/1993/inquiry.htm>
- Hansen, L. M. (2002). Defining inquiry: Exploring the many types of inquiry in the science classroom. *The Science Teacher*, 69(2), 34-37.
- Jarrett, D. (1997). *Inquiry strategies for science and mathematics learning: It's just good teaching*. Northwest Regional Educational Laboratory.
- Kuster, G., Johnson, E., Keene, K., & Andrew-Larson, C. (2017). Inquiry-oriented instruction: A conceptualization of instructional principles. *PRIMUS*, 0(0), 1-18.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review*, 7(1), 51-61.
- Makar, K. (2012). The pedagogy of mathematical inquiry. In R. M. Gillies (Eds.), *Pedagogy: New developments in the learning sciences* (pp.371-397). Nova Science.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. NCTM.
- Programme for International Student Assessment (2018). *PISA 2021 Mathematical Framework Draft*.
https://pisa2021-maths.oecd.org/?fbclid=IwAR3sWWZSAQsGBdzuVUxco9rNh0vdLHiOOB1r_s_GybKLFO_vVMXZvvKfgY
- Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton University Press.

專論

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1(1), 319-370.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80.

Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching and Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21(1), 59-83.

The Process and Tasks of Inquiry-based Mathematics Instruction Implementation by an Elementary Teacher

Wei-Min Hsu* Hsuan-Min Huang**

The research purposes were to investigate the processes of inquiry-based mathematics instruction, and the tasks teachers concerned in the process. An experienced elementary teacher who majored in mathematics education participated in this study. This study adopted case study as the research method and collected data through recording video in the classroom and interviews with the teacher. The results indicated that the teacher posed a non-routine mathematical problem for students in the beginning of her instruction, then she went through the stages of linking understandings, problem solving through inquiry, and elaboration for generalization. At different stages, the teacher concerned different tasks: at the stage of linking understandings, the teacher focused on “providing hints” to help students to understand the problem and what is asked; at the stage of problem solving through inquiry, “asking for explanation” was her major concern in order to help students to develop mathematical reasoning for solving problem; “sequencing students’ thinking processes” was the focus at the stage of elaboration for further application. The processes of inquiry-based mathematics instructed by the teacher following the procedures of math problem solving. Teaching skills such as asking questions and interacting with students were often adopted by the teacher to achieve the instructional goals that included understanding the meaning of problems, development of problem-solving methods, and applying the methods to other problems with similar mathematical structure.

Keywords: case study, teaching tasks, elementary teacher, inquiry-based mathematics instruction

* Wei-Min Hsu, Distinguished Professor, Department of Education, National Pingtung University

** Hsuan-Min Huang, Teacher, Taipei Zhongshan Elementary School

Corresponding Author: Wei-Min Hsu, email: ben8535@mail.nptu.edu.tw