

國小資優資源班數學課程實施之個案研究

徐偉民* 陳佳萍** 蔡桂芳***

本研究旨在探討國小資優資源班數學課程實施的情形，以及教師課程實施的考量因素。以一位任教超過 20 年的資優資源班數學教師為對象，採個案研究法，透過教學觀察和訪談來蒐集資料，得出兩個主要的發現：一、個案教師在實施資優數學課程時，大量使用沒有固定解法與程序的高認知問題，且採用師生共同探究或學生自行探究的方式，來提供資優生許多推理、臆測與檢驗的機會。二、個案教師實施資優數學課程時，主要考量個人對於資優數學教學與學習的觀點，以及資優生好奇與喜歡挑戰的學習特性，自行蒐集與設計活化的數學問題。環境脈絡與課程配合教科書使用之因素在個案教師設計與實施資優課程時的考量較少，符合國內外資優班實施數學教學之精神。研究者根據結果提出以下建議：一、持續關注資優數學課程實施的議題，從不同的面向來分析與了解；二、擴大與多樣化研究對象，以了解不同背景與教學經驗的資優資源班教師數學課程實施情形與考量因素。

關鍵字：國小、資優資源班、數學問題、數學課程實施

* 作者現職：國立屏東大學科普傳播學系教授

** 作者現職：屏東縣立社皮國小教師

*** 作者現職：國立屏東大學特殊教育學系助理教授

通訊作者：蔡桂芳，e-mail: fanger@mail.nptu.edu.tw

壹、緒論

優質的人才是國家最可貴的資源，世界各國莫不重視資優人才的培育，而資優教育的核心價值在於因材施教，注重個別化需求，透過充實性課程的提供，讓資優學生潛能得以充實發揮（郭靜姿、賴翠媛，2015）。Reis、Burns與Renzulli（1992）強調教師需安排具有挑戰性的活動，使資優生身心得到適性的發展；而教育部頒佈的「特殊教育課程教材教法及評量方式實施辦法」（2010年12月31日）中，第3條也提到資賦優異教育之適性課程，除領域之加深、加廣或加速學習外，應加強培養批判思考、創造思考、問題解決、獨立研究及領導等能力。然而，在沒有資優生專屬的數學課程和教科書的前提下，資優資源班的教師必須具備教學設計的能力，從資優生的特質與需求，發展、設計出滿足資優生需求的區別性課程或教育方案（林佩瑩、王振德，1998）。而數學課程是以數學問題為單位來規劃、設計與實施（徐偉民，2011；Stein, Remillard, & Smith, 2007），讓學生在解題的活動中，獲得數學的知識與能力（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。由此看來，資優資源班教師在進行數學課程設計時，最重要的關鍵便在於數學問題的設計，讓資優生在解題中培養高層次的批判與創造思考，以利達成資優教育的目標。

根據學生解題時所需付出的認知需求或負荷來看，數學問題由低到高不同的層次分別為：記憶型（memorization）、無連結程序型（procedures without connections）、具連結程序型（procedures with connections）和作數學（doing mathematics）四種類型（Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000），前兩類屬於低認知問題，學生不需要付出太多的認知負荷即可成功解題，解題時強調的焦點在於運算技巧的熟練；後兩類屬於高認知的問題，學生必須在理解與意義連結的前提下，才能成功解題。從資優生的特性與能力來看，資優數學課程應以高認知的數學問題為主，方能裨益學生在過程中培養溝通、推理、論證、解題等數學能力（NCTM, 2000）。

過去數學教育改革的焦點在於數學課程，但和學生數學學習最直接相關的，卻是教室內數學課程的實施（Mullis, Martin, Gonzales, & Chrostowski, 2004; Stein et al., 2007）。雖然Stein等人（2007）建議數學教育研究者應探討教室內數學課程實施的情況，以及影響教師數學課程實施的因素，以進一步瞭解數學課程和學生學習之間的關係，但數學課程實施的國內外相關研究尚在起步（如徐偉民，2011；Grouws et al., 2013; Huntley, 2009; Tarr et al., 2008; Tarr, Grouws, Chávez, & Soria, 2013），探討資優數學課程實施的研究更是有限。過去三十幾年來，資優教育課程的實施一直是資優教育研究中的重要主題（Sheffield, 1994; Tomlinson, 2005; VanTassel-Baska, 2003），但是針對數學課程實施進行的實徵研

究卻仍少見。因此，本研究以資優資源班的數學課程實施出發，採用Stein等人（2007）的建議，以數學問題為焦點，從資優資源班教師設計的數學問題類型和實施方式來探究資優班數學課程實施的情形，同時延續過去的發現與主張（如徐偉民，2011；Stein et al., 2007），從教師個人、學生特質、教科書特色、以及環境脈絡等四個因素來探討影響教師資優數學課程實施的因素，希望對國小階段資優資源班現場數學課程實施的面貌有更清楚的了解，同時也可以作為日後資優生數學充實課程或資優資源班教師教學的參考。

貳、文獻探討

一、資優生的數學課程

資優生數學學習的特質包括了：抽象思考能力強、能用圖形和符號來簡化複雜資訊、歸納演繹能力強、善於找出解題的關鍵、思考靈活、能用多種方法解題等（郭靜姿，2000）。因此，一般數學課程的規劃並不適合資優生，教師必須對現有的課程做適當的調整或改編，透過概念導向數學課程的設計與實施，讓資優生以探究、解題與實驗的方式和數學互動，藉此瞭解數學建模的歷程，建構自己的數學知識基礎，進而對數學知識有深入瞭解與流暢的應用（侯雅齡，2010）。由此觀點來看，教師在資優數學課程的安排設計上，應具備多樣性、系統性、挑戰性，重視資優生個別興趣和需要，提供開放性思考和擴散性思考的課程，讓資優生可以進行更深入的探索和學習，並鼓勵學生將探究的結果發表（蔡典謨，1997）。

過去，常見的三種資優課程方案包括了充實方案（enrichment program）、加速方案（accelerative program）、與加深方案（deepen program）三種（劉祥通、陳明聰、徐偉民，2015）。充實方案強調數學與其他學科及日常生活經驗的聯結，透過不同的活動來擴展數學學習的經驗，讓學生有建構與欣賞數學的機會（Kitano & Kirby, 1986）；加速方案主張資優生應避免重複學習已經瞭解的內容，提早學習更高年級的題材。因為，個體是否可以學習特定的課程內容，取決的是其能力而非年齡（Benbow, 1991）；加深方案則是主張透過探索與發現的活動，讓學生在挑戰的學習環境中，來發展高層次的思考與推理。深入的數學學習活動與高層次思考技能的培養，對資優生是非常重要的（McClure, 2001）。無論採用哪一種課程方案，都應該考量到數學內容的多樣性、深度、廣度、複雜度和抽象度，強調概念的探索與發現，以問題解決為重點，並強調解題後溝通與表達，以及與其他領域的連結等（Johnson, 1994）。多樣性、挑戰性、複雜性、探索性、連結性等，被認為是適合資優生學習特質與需求的數學課程原則（Maker, 2005）。

數學課程的特色在於其組成的基本單位是數學問題（徐偉民，2011；Stein et al., 2007），解題是數學課程實施時的主要活動（NCTM, 2000），數學問題甚至是影響教師教學的主要關鍵（Grouws, Smith, & Sztajn, 2004; Silver, Mesa, Morris, Star, & Benken, 2009）。因此，要瞭解資優數學課程的規劃與實施，必須從數學問題的類型和實施兩個面向來探討，才能瞭解教師實施的數學課程是否符合資優生的學習特性與需求。同時，數學問題的類型與實施，也是影響學生數學學習的最主要關鍵（徐偉民，2011；Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2007）。但數學問題的類型有哪些？哪些類型比較符合資優生的學習需求與特質？數學問題有幾種不同的實施方式？問題類型和實施方式之間是否有相互的影響？這些問題都需要從相關研究來獲得解答。

二、數學問題的類型

數學問題是教師在進行數學教學時的主要依據（徐偉民，2013）。Henningsen與Stein（1997）認為數學問題是指教師在數學課堂中所採行的主要活動，其目的是要將學生注意力集中在一個特定的數學概念、思考或技能，由此，數學問題對學生數學學習深具影響。Stein等人（2000）認為數學問題類型是影響教師教學和學生學習的關鍵，因此因應學生解題時所需的認知需求，將數學問題分為低認知與高認知的問題，其中低認知的問題包含了記憶型和無連結程序型兩種類型，高認知的問題則包含具連結程序型和作數學兩種類型。四種不同類型問題的說明與舉例如後：

（一）記憶型問題

學生解該問題時只需要用到之前學過的事實、規則、公式、或定義來解題，同時問題本身不需要用到程序來解題，或是解題的時間太短，以致於不需要用到程序。這類型的問題明顯地是以過去所學的內容進行直接的複製，不要求對這些事實、規則、公式和定義進行概念或意義的連結。例如，把 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ 換算成小數，學生過去學過 $\frac{1}{2}$ 等於0.5， $\frac{1}{4}$ 等於0.25，可以直接得到答案，不需要使用程序來解題。

（二）無連結程序型問題

強調計算程序的問題，或是可使用過去所學特定程序來解題的，都是屬於此類型的問題。這類問題通常解題的方法和程序很明確，僅需要有限的認知需求即可成功解題。在使用程序解題時，並不強調和概念或意義的連結，解題的焦點在於產生正確的答案而非發展數學的理解，同時不要求學生解釋，或是要求學生解釋時，僅聚焦在其所使用的程序。例如，把 $\frac{3}{8}$ 換算成小數與百分率，學生必須以直式來計算，得出0.375後再將小數點往右移兩位得出37.5%。

(三) 具連結程序型問題

此類型的問題將學生的注意力聚焦在程序的使用上，並藉此讓學生對所學的數學概念有更深入的理解，同時強調解題的程序和概念之間有密切的連結，而非單純強調程序的使用而已。這類型問題經常以多重表徵的方式來呈現，透過不同表徵的連結來幫助學生發展概念的理解。要成功解決這類型問題，學生需要付出一定程度的認知努力，結合對概念的理解以及所需要的程序，才能成功的解題。例如，利用 10×10 的方格，來畫出對應 $\frac{3}{5}$ 的小數和百分數，學生必須以圖像的方式來連結 $\frac{3}{5}$ 、0.6，和60%。

(四) 作數學型問題

此類型的問題需要學生進行複雜且非運算的思考，學生必須要去探討和了解數學本質、程序或關係，同時自我監控和調整自己的認知歷程後，再適當地存取和使用過去所學的相關知識和經驗來解決問題。在解決此類型問題時，學生需要付出相當的認知努力，而且可能因為解題過程與方法的不確定性，而會產生某種程度的焦慮。學生也需要分析並主動地檢測問題本身的限制，因其會限制可能的解題策略與結果。例如，在 4×10 的矩形方格中，塗上其中的6小格，並用這個矩形來解釋如何決定這6小格在此面積中所佔的百分率？小數？分數？學生在解此題時，除了畫出相對應的圖形外，要提出合理的解釋來說明他們決定與得出答案的過程。或是「時鐘的分針與時針從第一次重疊至第二次重疊，需經過多少時間？」（劉晉璋、劉祥通、康淑娟，2010），學生在解題時並無固定的方法或程序，必須要瞭解分針所要追趕的距離（分格數），以及分針與時針在走的過程中所走分格數的關係，才能成功解題。

數學問題不僅影響了學生數學學習的焦點，也會影響教師對問題的實施方式（Henningesen & Stein, 1997; Hsu, 2013）。從資優生的學習特質來看，資優數學課程應以高認知的數學問題為主，讓學生有較多思考、推理、臆測和證明等能力的展現與培養，但在資優班的數學課中，教師所設計和使用的數學問題類型是否符合資優生的需求？值得進一步探討。

三、數學問題的實施方式

一般而言，低認知的數學問題著重透過記憶事實或定義來解題，或強調運算程序的操作，學習的焦點在於程序的熟練。因此，教師可能採用傳統講述與傳遞的方式來實施；而高認知的數學問題則要求學生進行意義與概念的連結，讓學生在思考和探索的過程中，來發現解題的方法並理解數學的概念（Silver et al., 2009）。因此，教師在過程中會提供學生適度的鷹架協助，以及更多探索、解釋和說明的機會，以達成概念理解、溝通、推理等能力的發展（Stein et al.,

2007)。不過實際的研究也發現，教師可能會因為強調程序的操作，或是因為過程中教師高度的引導與採用封閉式的對話，使學生以低認知的方式學習高認知的數學問題（Henningsen & Stein, 1997; Hsu, 2013）。例如Hsu（2013）的研究發現，教師數學問題實施的方式有小組討論、師生對話、以及個別練習三種方式。其中採用小組討論來實施的數學問題，較能討論高認知的數學問題，學生不但可以根據自己的理解來進行解題，而且過程中教師提供表達、溝通與解釋自己解題思考的機會；至於採用師生對話來實施的問題，如果教師大都運用封閉式對話的方式來進行（即有固定且簡短的答案），即使是高認知的問題，也因為教師運用了高度的引導與對問題的切割，使學生解題時不需要付出太多的認知努力，也不需要去思考與探索解題的方法，只要回答教師切割後的封閉性問題即可。意即，學生以低認知的方式來學習高認知的問題。由此可了解為什麼研究者主張要從教師採用的數學問題類型，以及其數學問題實施的方式兩個面向來探討，才能完整瞭解教室內數學課程實施的情形（徐偉民，2011；Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2007）。

除了了解資優資源班教師所使用的數學問題類型外，教師實施過程中是否提供學生進行探索和思考的機會？是否讓學生有解釋和表達的機會？是否採用開放式的對話來引導學生思考等？這除了影響學生數學學習的焦點與結果外，也攸關是否符合資優生的能力與特質。過去的研究主張與發現，將作為本研究在探討資優資源班數學課程實施時的基礎。

四、教師數學課程實施時考量的因素

國內研究者發現，教師在課程實施過程中是主動參與者和詮釋者，而且會因教師個人（包括其知識、經驗、信念、專業角色定位）、學生課堂的學習態度和反應、教科書的特色，以及課程實施場域的特定脈絡等因素，而影響到其數學課程的實施（徐偉民，2011）；王玉品與徐偉民（2009）、連安青（1999）的研究也發現，教師在使用改革取向的數學課程時，因為個人的知識和信念、學生課堂上的反應以及課程實施場域脈絡等因素，使得課程的實施考量有所不同。在國外，Henningsen與Stein（1997）的研究發現，教師在實施數學問題時，因為本身的學科知識、信念和設定的目標、學生的學習態度以及教室常規等因素的影響，有時會以低認知的方式來實施高認知的數學問題；Lloyd（2008）的研究也發現，某些教師會考量到個人過去的經歷、課程實施場域的特色，以及課程本身特色等因素，而去調整其課程實施的內容；Remillard（2005）指出教師在數學課程實施時，主要考量的是教師本身和教科書特色兩個因素，其中教師本身包括教師具備的教學知識、信念和個人角色定位等，而教科書特色包含主觀的編輯哲學和客觀的編排結構與表徵，在兩個因素互動過程中，再加上考量課程實施所處的脈絡環境和學生的反應，才形成了教室內課程實施的樣貌；

Tarr等人（2013）發現課程的型態是統整主題式或傳統學科本位、是否給予學生練習機會和教室的學習環境良窳都會影響學生的數學學習效果；而Grouws等人（2013）、Stein等人（2007）、Tarr等人（2008）的研究均指出，教師在數學課程實施時，受到了教師個人的知識和信念、學生的反應、教科書的特色、以及包含時間與政策等脈絡因素的影響，同時這些因素彼此互動而影響教師數學課程實施的結果。

國內外的研究結果都共同指出，影響教師數學課程實施的主要因素，包括了教師個人、學生反應、教科書、與環境脈絡等，這四個因素彼此相互影響。這說明了數學課程實施背後思考歷程的複雜性，同時也提供一個架構讓我們可以深入了解資優數學課程實施背後的影響因素，這四個因素是否也交織影響著國小資優資源班教師數學課程的實施？值得進一步了解與探討，以作為後續資優數學課程實施相關研究的基礎。

參、研究方法

一、研究方法與對象

本研究旨在探討資優資源班教師，在資優數學課程實施中的數學問題類型與實施方式，並探討影響教師數學課程實施時的因素。數學課程實施是一個複雜且高度個人化的議題（徐偉民，2011），且資優數學課程實施的研究尚在起步階段，在博碩士論文系統中以資優數學教學為題的論文僅13篇，放寬搜尋條件至資優數學，增加為19篇，且其中多為國中階段之研究。而國小資優班數學課程實施相關的篇數不多，焦點亦非全然是討論國小資優班教師實施數學課程的議題（石修銘；2013；吳耀宗，2010；郭美如，1998；徐銘基，2009；陳廉偉，2009；黃楷茹；2004；楊麗華，2000；蔡依伶，2010）。因此，研究者採用個案研究法，以一位長期任教於國小資優資源班的資深教師為對象，進行一學年的教學觀察和深度訪談，希望可以藉由長期且一個完整學年的資料蒐集，來了解資優資源班數學課程實施的情形與其影響因素。選擇資深教師為對象，是希望藉其豐富的課程設計與實施的經驗，以及良好的表達能力，來獲得有意義的資料，而非要作一般化的推論。

參與本研究的美麗教師（化名）服務於臺南市花園國小（化名）五年級資優資源班，她畢業於師資培育大學特殊教育系資優組，之後又取得數學教育碩士，任教資優資源班的經歷超過20年。其資格不但符合縣市教育處對資優資源班教師聘任的相關要求，也擔任縣市國教輔導團數學領域輔導員及教育部深耕計劃數學領域種子教師，曾獲得特殊優良教師獎及師鐸獎，多次獲得全國科展

數學科前三名及特教評鑑特優等榮譽。由此來看，美麗老師不但有豐富的資優數學課程設計與教學的經驗，其傑出的表現相信可以使本研究獲得豐富且完整的資料，藉此可以完整地瞭解資優資源班數學課程實施的樣貌。

二、資料蒐集

(一) 教學錄影觀察

研究者為了瞭解教室內資優數學課程實施的情形，因此針對美麗老師的數學教學進行錄影，因為錄影內容保留了教室的活動，不僅可以仔細地從不同的觀點去檢驗複雜的活動，還可以將錄影內容慢速播放並且多次的觀看 (Jacobs et al., 2003)。本研究以教學觀察錄影的方式，進行為期一學年的資料蒐集 (2010年9月至2011年4月)，共觀察了上下學期各9週，每週2節的資優資源班數學教學，共錄影36節課，18週的課程內容如表1。美麗老師表示課程設計採主題式的充實模式，包含了數學遊戲 (如「數學24」)、教師引導的主題探究 (如「解碼大師」、「邏輯圈」) 等，課程設計時也會參考普通班的數學課程內容。所有錄影的資料均轉錄成逐字稿，採用Stein等人 (2007) 的建議，以課堂中所使用的數學問題類型和實施方式為焦點，來了解個案教師在資優班數學課程實施的情形。

表1 花園國小資優班數學充實課程學年課程內容表

週次	課程名稱	
	上學期	下學期
一	數學影子—心智圖 (1)	頂點珠
二	數學影子—心智圖 (2)	尤拉公式
三	解碼大師—神奇猜心術	阿基米德立體圖
四	解碼大師—身分證的秘密	柏拉圖立體圖
五	數學魔術—黑白棋翻翻樂	多面體點線面的探究
六	數學魔術—九宮魔術	立體圖形截切面的探究 (1)
七	神機妙算	立體圖形截切面的探究 (2)
八	(美麗老師請假)	規律探索
九	搶錢大作戰、數字定位棋	數學24
十	數字邏輯圈	(考試週)

(二) 訪談

資優資源班的數學課程，通常由授課教師自行規劃與設計，因此，本研究

的訪談焦點在於了解個案教師數學課程設計的理念與目標，以及在實施過程中考量的因素。例如：「您如何決定每一次的教學活動的主題？選擇的原因為何？」、「當您在進行課程設計或調整時，考量的因素有哪些？」、「您通常採取什麼教學方法？您如何判斷這樣的教學方法能達到課程的目標？」、「每一單元上完，是否有遭遇教學上的困難？」等，透過半結構式的訪談，來了解美麗老師在資優數學課程設計與實施時的考量，以及課程實施後之省思檢討。訪談在美麗老師教學完後進行，共進行18次，每次均全程錄音，作為後續資料轉錄與分析的基礎。

三、資料分析

(一) 資料編碼

本研究主要的資料是觀察和訪談的資料，這兩類的資料均轉錄成文字並進行編碼的工作。編碼以「類別-日期」為原則。由於錄影觀察資料的分析主要進行的是數學問題的計數與歸類，因此類別-日期後面加上題碼，而訪談資料則在類別-日期後面加上有效的一組對話編號。例如：Ob1029-1-01代表10月29日第一節課的第一個數學問題、In0917-01代表9月17日對美麗老師訪談的第一組有效對話。

(二) 資料信度

觀察的資料主要是以數學問題為單位，分析個案教師在資優數學課程中所使用的數學問題類型與實施方式，因此，分析的焦點包括了數學問題的計數、問題的類型和實施方式三部份。本研究採用 Henningsen 與 Stein (1997) 對數學問題的定義：一個數學問題為課堂作業上致力於一個特定的數學概念學習。依此定義來看，美麗老師以主題或關鍵概念為軸心所設計的一個學習活動，即為一個數學問題。如：數字邏輯圈的活動，美麗老師在電子白板上顯示 7 個重疊的圓圈，數字 1-14 中，依序為 6、14、□、13、□、7、□、□、2、□、□、12、□，已先填入 6 個數，剩下 8 個數字，讓學生填入口中，且每個圈圈的 3 個數字合起來必須是 21 (Ob1112-1-01)。美麗老師在學生解題過程中隨口提問的簡單或引導問題，如 3 加 8 加 9 等於？2 是質數嗎？10 的因數有哪些等，則不列入數學問題的計數。

而在數學問題類型上，本研究採用 Stein 等人 (2000) 對於數學問題類型的分類標準，依解題時所需的認知需求，將數學問題分為記憶型、無連結程序型、具連結程序型和作數學四種類型；而在數學問題的實施上，則參考了 Stein 等人 (2007) 的主張、徐偉民 (2011) 的研究發現、同時對照美麗老師實際的課堂表現，將數學問題的實施分為師生共同探究與學生自行探究兩大類，前者

可再分為師生開放性對話與封閉性對話，後者可再分為小組討論與個別解題。

數學問題的計數、類型和實施方式均採用評分者信度，以進行正式分析前的校正。分析工作的進行，由兩位主修數理教育的碩士班學生，連同本文第二作者一起進行。首先向他們說明關於數學問題的定義與計數標準、四種數學問題類型的定義歸類原則、以及數學問題實施方式的類別後，針對個案教師一節課中所使用的數學問題數量進行計數分析，再針對分析不一致的地方進行討論與確認，之後再進行三節課的分析，並採用歐用生（2000）所提出的內容分析

信度公式（先算相互同意值 P_i ， $P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$ ， M 表示兩人共同同意項目數，

N_1, N_2 為每位評分員同意項目數；再算平均相互同意值（ P ）， $P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$ ， N

表示評分者兩兩相互比較總次數；最後再算信度（ R ）， $R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$ ， n

為評分者總人數），來計算評分者間的一致性，得出.96 的信度值，之後再進行問題類型和實施方式的分析。在數學問題類型和實施方式上也採類似的程序，先進行一節課的試行分析與討論，再進行三節課的分析與信度建立，最後得出問題類型的評分者信度為.94，而在問題實施方式上，則兩次分析的結果均一致。

而在訪談資料的分析上，研究者與評分員針對「一組有效的對話」的定義作清楚的說明，例如：

R：請問您在進行課程設計或調整時，有哪些因素會影響您的課程實施？

T：我會視學生的程度或年齡來調整自己的教學方法，以此單元來說，面對高年級學生我會請他們分析出答案為何會是 9 的倍數？原理是什麼？如果是面對低年級學生，則是會列出大家的答案，最後讓他們發現是 9 的倍數（In0910-12）

涉及一個主要影響因素的一問一答為一組有效的對話，但問候語、與數學課程無關的聊天，則不列入有效對話的計數。之後，進行兩次的歸類與討論，以確認定義的明確度。第一次針對一次訪談內容進行有效對話計數的分析中，一致性為百分之百；接著再針對三次訪談內容進行各自分析，也得出.99 高信度；而在訪談資料的分類上，採用徐偉民（2011）對於影響教師數學課程實施因素的分類架構，先進行一節課的試行分析與討論，接著三位評分員再針對三次的訪談記錄進行各自的分析歸類，最後得出.98 的信度值。由上顯示，本研究

無論在觀察與訪談的資料分析上，都透過評分員的一致性來建立信度，同時都獲得高信度值後才進行後續的分析與統計。

(三) 資料效度

本研究觀察和訪談資料分析的類別，均來自過去相關文獻的主張或研究發現，並對照美麗老師實際的課堂表現來對分析單位與類別進行定義，因此分析的類別除了具理論支持外，也根據現場資料進行歸類上的調整。在觀察與訪談的逐字稿整理完後，也都交由美麗老師進行確認，再加上具有課程實施研究經驗的兩名大學研究者過程中的監控與分析結果的確認。經由理論的支持、參與者的檢核、專家的監控與確認等三角校正歷程，使本研究的資料分析結果具相當程度的可靠性，能反映出個案教師資優數學課程實施的樣貌。

肆、研究結果

一、以高認知的數學問題為主的資優數學課程

美麗老師在 36 節課中，總共實施了 179 個問題，平均每節課（40 分鐘）使用約 5 個問題。在 179 個問題中，記憶型問題 10 題、無連結程序型問題只有 1 題，低認知問題合計 11 題，佔全部問題的 6.2%；具連結程序型問題 50 題、作數學問題 118 題，高認知問題合計 168 題，佔全部問題的 93.8%，四類型問題的分布統計如表 2。明顯地，美麗老師在資優數學課程中，以實施高認知問題為主，各類型問題的說明如後。

表 2 美麗老師實施的數學問題類型統計表

數學問題類型		數量	合計	
低認知需求	記憶型	10 (5.6%)	11 (6.2%)	179 (100.0%)
	無連結程序型	1 (0.6%)		
高認知需求	具連結程序型	50 (27.9%)	168 (93.8%)	
	作數學型	118 (65.9%)		

(一) 低認知的數學問題

記憶型的問題有 10 題，佔全部的 5.6%，通常都出現在課程主題開始時。例如，在「立體圖形截切面的探究(2)」主題中，美麗老師上課一開始拿出由頂點珠拼成的多面體立體圖形，以複習的方式詢問學生此圖形有幾個珠（頂

點)？幾個棒(邊)？接著，由學生進行點數活動(如圖 1, Ob0324-1-01)；在「尤拉公式」主題中，上課一開始美麗老師拿出多個立體圖形請學生進行分類(Ob0217-2-01)。這些都是依據學生的舊經驗及數學概念的定義來進行解題的數學問題，因此被歸類記憶型的數學問題。

而無連結程序型的問題上只有 1 題，佔全部問題的 0.6%，出現在「神機妙算」的課程主題中，美麗老師以電子白板展示出「 $579 \times 11 = (\quad)$ 」的數學問題，並以限時方式看學生能否快速解出答案，之後再和學生探究算式的規律，以便可以快速的解題答案(Ob1022-2-01)。雖然美麗老師意圖讓學生去觀察並察覺特殊數字(如 11)在運算中出現的規律，但就問題本身來看，是屬於聚焦在程序運用的計算問題，因此歸類在無連結程序型問題。

(二) 高認知的數學問題

高認知的數學問題有 168 題，其中具連結程序型的數學問題有 50 題，佔全部數學問題的 27.9%。如在「尤拉公式」的課程主題中，美麗老師給學生一個超大的立體圖形，請學生算出此圖形有幾個頂點？幾個邊？幾個面？學生必須從尤拉公式(頂點數－邊數＋面數=2)去推算頂點、邊和面的值並利用公式去驗證數值(Ob0217-2-04)；在「解碼大師－身分證的秘密」的課程主題中，美麗老師以電子白板展示一組身分證字號(如：A23456789□)，讓學生去推算此人的身分證字號末碼為何？學生必須先查表查出英文字母的代碼(A 為臺北市=10)，再利用計算規則去推算此身分證字號的末碼數字(將 A 以 10 帶入，身分證字號變為 1023456789□，該數字由左至右分別乘以 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 後相加，得出 157， $157 + \square$ 需為 10 的倍數，故 $\square = 3$)。之後，給一組身分證字號讓學生判斷其真偽，並讓學生自製一組有效的身分證字號(Ob0924-2-03)。

作數學型的數學問題最多，有 118 題，佔了全部問題的 65.9%，包括在「多面體點線面的探究」課程主題中，美麗老師拿出正 12 邊形的柏拉圖立體圖形(圖 1)，詢問學生如果削掉其中一角，其截切面是否仍為五邊形？原本的面會變成什麼形狀(Ob0310-1-01)？在「數字邏輯圈」的主題中，美麗老師在電子白板上顯示 7 個重疊的圓圈，其中 5 個灰色的區域已經填入數字(如 2, 3, 4, 5, 7，圖 2)，請學生將右邊已知的數字填入圈圈內，數字不重複且每一個圓圈的和必須為 10(Ob1112-1-06)。學生所進行的是邏輯推理的概念活動，美麗老師甚至讓學生以這樣的規則為基礎，自行設計數學問題並進行解題活動，如圖 3。

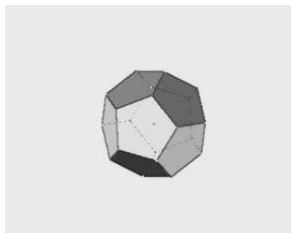


圖 1 正十二面體圖

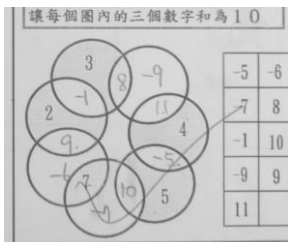


圖 2 數字邏輯圈主題之數學問題



圖 3 學生自行設計的數學問題

總結來看，美麗老師在資優資源班的數學課程實施，著重於作數學型的問題，來培養學生的邏輯推理與思考能力，其次是具連結程序型的問題。這兩類型均是屬於高認知的數學問題，而低認知問題所佔的比例很低。由此可知美麗老師所實施的資優資源班數學課程，確是具有挑戰性、複雜性且偏向高層次思考的數學課程。

二、兼顧師生共同探究與學生自行探究的實施方式

從美麗老師的教學分析中，發現其數學問題的實施可分為師生共同探究和學生自行探究兩種方式，在師生共同探究中，可從教師的提問與學生的回答來細分為開放性對話和封閉性對話：開放性對話是指教師提問開放性且無固定答案的問題，學生有充裕的時間來表達自己獨特的想（解）法；而封閉式對話是指教師提問簡單且有固定的答案的問題，學生只需回顧問題中的相關資訊、回憶簡單的事實或計算後即可回答，不需說出完整的思考歷程。在學生自行探究中，還可再細分小組討論和個別解題兩種方式：小組討論是指學生透過小組合作來共同探究問題並解題，而個別解題則是由學生單獨進行探究與解題。依此兩種主要實施方式和四種次要方式來進行歸類，結果如表 3 所示。其中，有 33 個數學問題同時使用了 2 種實施方式，重複計數的結果，使數學問題的總數為 212 題：以師生共同探究來實施的有 117 題，佔全部的 55.2%，其中大部分是以開放性對話的方式來實施（93 題）；讓學生自行探究的有 95 題，佔全部的 44.8%，其中進行個別解題的題數略多於小組討論的題數。由此看來，美麗老師在實施資優數學課程時，兼顧了師生共同探究與學生自行探究兩種方式，且過程中提供學生許多開放思考與討論的機會。各類別詳細進行的方式說明如後。

表 3 美麗老師數學問題實施方式的題數及所佔的比例

實施方式 數學問題	師生共同探究		學生自行探究		合計
	開放性對話	封閉性對話	小組討論	個別解題	
題數	93	24	40	55	212
比例	43.9%	11.3%	18.9%	25.9%	100.0%

(一) 師生共同探究

師生共同探究之開放性師生對話，是所有實施方式中比例最高的，佔全部的 43.9%。例如：在「搶錢大作戰」的課程主題中，美麗老師先舉例來說明以下的遊戲規則：

所有稅袋分裝成數袋，數量標示在袋子上，分別為 1-10，由百姓來搶，搶到的都可以為百姓所有。但當搶走一袋時，需將其所有的因數交給國王，當成百姓繳的稅；沒有因數袋的稅款，百姓不能拿走，最後他們都歸國王所有。遊戲結束後，各自把搶到的數加起來，百姓如何搶才能搶到最多？

例如，如果百姓搶 9 的袋子，則需交出哪些袋子來？學生回答 1 和 3。學生瞭解規則後便先自行探究與個別解題，然後再以開放式對話來引導學生思考，來得出解決此問題的思考歷程與結果：

T: 要怎麼搶？先搶哪一個數？

S: 6 可以...

T: 怎麼搶？6 搶過來...

S: 3 給國王。

S: 我覺得應該搶 9。

T: ...為什麼？

S: 因為搶了 6 就要給國王 3，搶了 6，9 就必須放棄，所以搶 9 賺得多
(Ob1105-1-02)

在引導的過程中，學生猜測搶下 7 的數字後可以先搶 6，但美麗老師問搶了之後呢？學生回答依規則必須將 6 的有因數交給國王，包括 2, 3 都需交給國王（1 在搶 7 後就交出去了），但若將 3 交給國王後，9 就必須放棄，因為 9 的因數有 1 和 3，而 1 在選擇 7 時已經交給國王了，如果選擇 6 就必須將 9 放棄，因此應該搶完 7 後先搶 9 才對，而非搶 6。最後得出搶的順序應該是 7（交出 1）→ 9（交出 3）→ 6（交出 2）→ 8（交出 4）→ 10（交出 5），這樣便能搶到最多而繳給國王的數最少。在開放式師生對話的引導中，學生從一開始的猜測（搶 7 之後再搶 6），經過教師的提問，引發學生根據問題的規則與目的進行原有猜測的修正（應該搶 9），最後確認 7 之後應該搶的數字，並且完整地說明推翻原有猜測數字的理由。也就是說，在師生共同探究的對話歷程中，看到了教師透過提問來引發學生進行猜想、推理、檢驗、修正、確認等內在數學思考的歷程。最後，不但讓學生更瞭解解題的思考原則，也讓學生同意提高挑戰，把問題擴充到 1-20。同樣讓學生先自行探究後，再以開放式的對話來引導學生進行解題：

T: 挑戰 20 的呀！11 算浪費嗎？你想要 11 嗎？

S: 不要，因為 13 比較大

T: ...你們可以想 15，如果你要想 15，如果你要搶 1 到 15，哪一張一定白白犧牲掉？

S: 11

T: 為什麼 11 白白犧牲？...我因為要 13，所以 11 要白白犧牲（因為搶了 13，其因數 1 需交給國王，11 這個質數將無法再搶），對不對？

S: 對（Ob1105-2-01，括號內為研究者加註）

而在「立體圖形截切面的探究」的課程主題中，美麗老師也是以開放性的一問一答對話來引導學生截切面的形狀或數量，而非單向地一直解說，讓學生靜靜的聆聽而已（Ob0324-1-04）。而以封閉性師生對話來實施的數學問題只有 24 題，佔全部數學問題的 11.3%，是數學問題實施的方式中比例最低的。當美麗老師提供學生自行探索機會，但學生毫無發現、不知如何解題時，美麗老師會介入引導，但學生仍不太理解時，封閉性的提問就會出現，使美麗老師進行較多的講解。例如在立體圖形點、線、面關係進一步探究的「多面體點線面的探究」課程主題中，美麗老師請學生算出正十二面體的頂點、邊及面，學生無

專論

法在時間限制內完成，且在過程中亂了手腳，有些學生甚至放棄，因此美麗老師便以封閉性對話來引導學生如何快速正確的算出立圖圖形的點線面：

T: ...要如何很快算出它？頂點有幾個？邊有幾個？不用 20 秒就可以知道了。它有十二片，對不對？它的原件是什麼形狀？

S: 五角形

T: 好，請你畫出一個五角形，這裡總共幾片？

S: 12

T: 12 片，所以你寫乘於 12，假設我把它拆開來有十二片，對不對？

S: 對

T: 那每一個 5 邊形有幾條邊？

S: 5 條

T: 那現在有 12 片，應該有幾條邊？

S: 60

T: 那為何你們的資料邊是 30？

S: 因為它是兩個兩個共同一條邊，所以 60 要除以 2

T: 這樣是不是出來了 (Ob0310-2-05)

國小資優生數學的學習，通常需在有限時間內快速掌握學習重點，又要兼顧資優生開放性、高層次思考的需求，所以美麗老師會交替使用聚斂與開放性的問題，來讓學生快速掌握學習的焦點，也同時營造豐富思考的學習環境。有時，美麗老師也會以「故弄玄虛」的方式，來引發學生進一步的思考與推理。例如在「神機妙算」課程中，為了指導學生學會較有效率的心算，先讓學生進行個別解題競速，分別從 29×11 、 49×11 、 $83 \times 11 \dots$ 一直到 529×11 、 2905×11 。起初學生解題速度很慢，美麗老師遂以精準快速的方式念出答案，甚至請學生拿出計算機來。當學生嘖嘖稱奇時，老師再演示「積為被乘數字兩邊拉開，中間的數字為被乘數的數字相加」的訣竅（在兩位數 $\times 11$ 的情況下。若多位數 $\times 11$ 時，積的十位數為被乘數的個位和十位數字和、百位數為被乘數的十位與百位

數字和，以此類推），吸引學生的好奇，並以引導的方式請答對學生也說出個別算法：

T: 好，對於你們剛剛的速度滿意嗎？

S1: 不滿意。

T: 老師隨便變可以馬上寫出答案。...

S3: 老師你有串通好。

T: 我的答案 7172，對不對？（題目是 652×11 ）

S1: 我知道，652 加... 652 加前面，就是...

T: 你們有誰用這個作法的？

S1: 我~我用這個做法

T: 652 加 652，有誰用這個做法？

S2: 老師，我知道原因。

T: 好，我現在想要知道什麼原因。

S4: 我也知道...（括號內文字為研究者加註，Ob1022-2-04）

（二）學生自行探究

學生自行探究包括了小組討論與個別解題兩種實施方式。其中，讓學生以小組討論來進行探究的數學問題有 40 題，佔全部的 18.9%。例如在關於立體圖形的「規律探索」課程主題中，美麗老師讓學生針對某一個形體來設計相關的數學問題，將學生分成幾組並拿出幾個正多邊體，每一組選一個正多邊形體（例如四角錐），請每一組學生運用此正多邊形，設計三道題目，問其他組別的同學。並透過分組討論的方式來讓學生自行設計相關的問題：

T: 現在的任務就是你們那一組要找出三道題目，把三道題目寫下來，你如果負責的是四角錐，那就在四角錐那邊寫下三道題目，這三道題目是大家共同出的，我給你們十分鐘，十分鐘之後我們來互考。

S: 可以我們先討論，他們先記錄嗎？

T: 大家一邊討論一邊記錄比較快（學生們開始互相討論，Ob0331-1-02）

至於讓學生進行個別解題與探究的數學問題有 55 題，佔全部數學問題的 25.9%，是第二高的實施方式。例如在強調數字規律的「數學魔術—九宮魔術」課程主題中，美麗老師學生先跟學生玩撲克牌九宮格的遊戲，將數字牌 1 到 9 依順序由左至右排成九宮格，讓學生隨意選擇一張牌後，將該張牌橫列與直列的牌覆蓋，再選第二張牌並依相同規則將其餘牌覆蓋，最後剩下一張牌，三張牌的總和為 15，且無論如何選擇，最後剩下的三張牌之和都是 15。美麗老師請學生自行思考與探索為何剩下的牌其和都是 15（Ob1008-2-05）？之後結合九宮格活動來進行預言牌的魔術，讓學生心裡先選擇 11-19 的任一個兩位數，然後數出相同數量的撲克牌，之後拿出數出的撲克牌，再數出心裡所想數字之個位與十位數字和數量的牌，最後一張牌是底牌，請學生看底牌的花色與數字，然後將剩餘的牌蓋上去。最後，再將九宮魔術中覆蓋的牌蓋上去，由美麗老師找出學生剛才所看的底牌，連續兩次美麗老師均正確的找出學生所看的底牌，於是有了以下的對話：

T: 我是如何猜出底牌的？（學生思考狀，猜不出來）

T: 三張加總為什麼都是 15？

S1: 因為 1~9 的和是 45，這三張牌的和剛好占 45 的 $\frac{1}{3}$ ，所以和是 15

T: 為什麼底牌都在第 16 張？預言牌老師是怎麼放的，為什麼怎麼翻三張加總都會是 15？想想看，底牌會在第幾張出現？為什麼？（S3 自願上台解說）

S3: 第 16 張，例如：我想的二位數是 14， $1+4=5$ ， $14-5=9$ ，在 10~19 之間，不管選什麼數，最後蓋上去的都是 9 張牌 $14-4-1=(4-4)+(10-1)$ ，後來九宮格有 3 張牌留下來，其它 6 張牌都壓在上面 $9-3=6$ ，剛才的 9 張牌加上 6 張牌 $9+6=15$ ，底牌上面有 15 張牌，底牌自然會在第 16 張（Ob1008-2-06）

另一個美麗老師讓學生個別自行探索的特色出現在「數學魔術—九宮魔術」的課程後半，美麗老師讓學生進行數學問題的設計，不僅提供學生自己摸索、解題的機會，也可以用來檢視學生學習的成效（ob1015-2-02）：

T: 好，那你們就自己寫一下你自己的幸運數字，然後做一個練習，做一張數

字卡。

S: 一定要寫出來嗎?

T: 不寫也可以, 你讓人家猜, 旁邊就要... 你不想讓人家知道你的幸運數字是多少嗎?

S: 老師, 我這邊可不可以寫 500?

T: 可以啊。

S: 這是我的期望。

T: 你要滿分 500 分, 好, 當然可以啊, 試試看啊... 來加油, 我們看哪一個同學最快把全部做完喔。

總結來看, 雖然美麗老師兼顧師生共同探究和學生自行探究, 但若從細項並結合美麗老師所實施的數學問題類型來看, 則發現美麗老師在實施數學問題過程中, 提供很多機會讓學生進行開放性的思考、討論、或自行探索, 採用封閉性師生對話的比例只有 11.3%。由此可知, 美麗老師偏重以高認知的方式來實施數學問題。

三、美麗老師在實施資優數學課程時考量的因素

在 18 次訪談中, 蒐集了 170 組可進行分析的對話, 根據這 170 組可分析對話內容, 參考過去相關文獻所提出的課程實施考量因素類別, 發現美麗老師在資優課程實施時考量的因素可分為四類: 1. 教師個人因素 (T)。其中又可細分為教師的教學知識 (T1)、教師對教學和學習的觀點 (T2); 2. 學生的因素 (S)。其中還可細分為考量學生的程度 (S1) 與學生的學習特性 (S2); 3. 脈絡的因素 (C)。這包含考量學校行政 (C1)、教學時間與進度 (C2); 4. 課程的因素 (M)。這包含考量課程內容的順序 (M1) 與課程的內容 (M2)。170 對話歸類結果如表 4 所示。由表 4 來看, 美麗老師在資優數學課程實施中, 考量最多是個人因素 (佔 47.6%), 其中又以自己對於數學教學和學習的觀點為主要考量, 其次考量的是學生因素 (佔 35.3%), 尤其考量資優學生的學習特性, 脈絡和課程的因素並非美麗老師的主要考量。各考量因素詳細的說明如後。

(一) 教師個人因素

教師個人的因素, 是美麗老師在資優數學課程實施時最主要的考量, 共有 81 組對話被歸類在此因素, 佔所有對話數的 47.6%。其中, 有 29 組是屬於美

表 4 美麗老師數學課程實施時考量因素統計表

數量 \ 考量因素	教師 (T)		學生 (S)		脈絡 (C)		課程 (M)		合計
	T1	T2	S1	S2	C1	C2	M1	M2	
次數	29	52	26	34	5	12	7	5	170
合計	81 (47.6%)		60 (35.3%)		17 (10.0%)		12 (7.1%)		(100.0%)

麗老師個人的教學知識 (T1)，例如在課程名稱設計上，會以數學概念或數學語言來進行設計，像是尤拉公式、柏拉圖立體圖形、規律探索等，這些設計主要是要讓學生從觀察紀錄，去察覺規律、並檢驗結果 (In1008-06)。此外，美麗老師時時充實自己的教學知識，從網路、數學相關書籍、甚至動手操作的數學玩具等，將其轉化、改編成自己的數學課程 (In1008-04)。她也經常參加研習活動，從研習活動中獲得新的知識，將其轉化、修正並應用在自己的資優數學課程上 (In0924-05)；美麗老師也經常和數學輔導團教師互相交流、討論，彼此提供意見，再進行課程實施與修正 (In0407-03)。例如：

...我常參加研習活動，也喜歡閱讀相關的數學書籍，喜歡看書中有沒有好的數學點子，可以讓我應用在教學上，或者是有哪些是剛好可以連結到他們現在正在學習的單元概念，然後適時的轉化成教學，帶入課室中 (In0924-05)。

...在一次的輔導團專業成長中，請到林壽福老師來做分享，因此學到了許多數學魔術，所以決定來一下嘗鮮，且這個主題並不難，學生很容易懂 (In0407-03)。

而另外 52 組對話，是屬於美麗老師對於數學教學和學習的觀點 (T2)，這是在資優課程實施時最主要的考量因素，佔全部對話數的 30.6%。例如美麗老師認為數學魔術具娛樂性及挑戰性，可以滿足資優學生探索的慾望 (In1015-07)；將生活情境融入數學課程中，才能讓學生學到生活中的數學 (In1001-01)；或課程的設計必須要能夠充分發揮學生的思考和推理能力，以及透過溝通表達來檢驗學生是否理解，甚至據此來尋找對解題有興趣且敏感的學生，來加入自己科展的研究團隊 (In1112-01)。美麗老師總是思考資優學生在數學學習中應該培養什麼樣的能力，且不斷調整與修正自己的課程設計與實施 (In1105-04)。

...希望能將生活情境融入數學課程中,讓學生感知生活中處處有數學,時時都有驚喜 (In1001-01)

...我首先會蒐集資料,考慮學生適合怎樣的課程?可以培養學生什麼能力?課程轉化後實施...在實施的過程隨時做修正調整...基本上是愈修愈好。例如因倍數部分,之前是利用撲克牌,配合學習單;現在有電子白板,我就把教材轉成電子白板,再搭配學習單、教具,變成更棒更完整的教材,所以我的內容就是不斷的修正調整 (In1105-04)

...我把科展的主題納入課程中,讓每個學生都有機會參與並思考這個問題。...從上課中,學生充分發揮他們的思考與推理能力,除了能說出正確答案,還必須說明為什麼,我就從中挑選對這個問題特別有興趣、特別敏感的學生,就是我今年想參加科展的學生 (In1112-01)

(二) 學生因素

學生的學習特性和程度,是美麗老師在資優數學課程實施時次要的考量,共有 60 組對話被歸類在此因素,佔所有對話數的 35.3%。其中,學生的學習特性 (S2) 比例略高於學生的程度 (S1)。在學生的程度上,有 26 組對話屬於此類,例如在「解碼大師—神奇猜心術」課程主題中,美麗老師會因學生的年級與程度來調整自己的教學,而且會依據資優學生的認知程度來設計適合他們的課程內容:

...會視學生的程度或年齡調整教學的方法,但以此單元為主,目標是一致的,都希望學童能理解原來是 9 的倍數在作祟,但是面對高年級的學生,則要他們分析出為何會是 9 的倍數?其原理原則是什麼... (In0924-07)

...他們能用數量去做推算,只是無法理解,為何在預言牌中隨意選定九宮格位置的撲克牌,最後都能達到總和為 15,他們認為關鍵一定是在我的預言牌,進而再去引導規律數字排列後,最後選擇的三個數字總和都是一樣的,學童也能理解原來是如此,進而能設計更複雜的九宮陣的數字謎題 (In1015-03)

在學生的學習特性上,有 34 組對話被歸在此類。資優學生對數學問題的好奇心,以及積極想尋求答案的學習特性,影響了美麗老師資優數學課程的實施,且教學過程中提供許多學生探究、猜測、與尋找規律的機會,例如:

...學童在驚訝中升起了強烈的好奇心，再適時的追問，引發了學生熱烈的討論... (In0924-10)

...學童在我猜測一兩次後，總是會迫不及待猜測我是怎麼知道的，常會出現「我知道了，換我來猜」的情景，但要猜測紅與黃，是有一半的機率的，因此，給予2到3次的檢驗測試機會，就可以知道他們是否真破解了，不過，在沒有記錄翻轉的過程之前，學生少有能看出規律的，一旦記錄了，一下子就能破解（「數學魔術—黑白棋翻翻樂」課程主題，In1008-03）

（三）脈絡因素

美麗老師在資優數學課程實施時，考量脈絡因素的比例並不高，只有17組對話，佔全部的10%。其中，在學校行政方面（C1），主要談及因其數學課程實施著重於教具的使用，例如立體圖形的操作與探究，希望學生能透過實體的操作而從中發覺其奧祕，但學校經費不足，無法提供充足的教具來讓學生操作使用，而是由美麗老師自行購買或由數學輔導團的支援，才使得學生有教具可以操作。而另一個考量的脈絡因素，則是在教學的時間與進度（C2）。美麗老師在教學時經常受到時間的限制，而無法讓學生有更多的討論或延伸出更多相關的概念。她表示如果有較充裕的時間讓小組進行討論或師生共同探究，那學生激盪出的答案比較具數學味，同時也令人讚賞：

...要進行本單元，需要大量的頂點珠及百力智慧片等實體操作，但是，學校無法提供如此多的操作性教具，所以是平時自費購買積存下來，或是部分輔導團支援才能完成（In0217-07）

...若小組有經過討論與對話，那麼激盪出來的答案都會比較漂亮，比較有數學味，有時也令人讚賞，但因為時間有限，原本希望有多一點的討論對話。例如：學生寫到「籃球」，應該可以再追問籃球裡有什麼數學的學問？很可惜，都沒有繼續追問探討（In0910-05）

（四）課程因素

課程因素是美麗老師在實施數學課程時，考量的比例最低的，只有12組對話，7.1%的比例歸類在此因素，因為美麗老師在進行課程設計時，已經經過多方面的考量，才挑選或設計出適合資優學生學習的課程內容，因此在訪談中較少談及有關課程的因素。其中，美麗老師在課程內容順序（M1）的安排上，會盡可能動靜交錯，學生才不會覺得太疲倦或太興奮（In0910-08），而且適時的

調整課程內容的順序，可以讓學生進行更有效的學習活動。另一個課程相關因素是屬於課程內容 (M2) 的類別，例如在「解碼大師—身分證的秘密」課程主題中，美麗老師擔心學生在現實生活中，會誤用自己所創造的虛擬身份證來申辦相關文件而觸法 (In1001-05)；或是搜尋到合適的課程內容，但會對其內容進行檢視與調整，以讓內容更具有挑戰性，同時也看看能激盪出學生什麼樣的思考與結果：

...可以考慮先進行探討，生活中哪裡有數學的影子？什麼東西或事物與數學有關？有什麼關係？等，然後再引入影片欣賞 (In0910-06)

...初次接觸這個網站，覺得這個活動適合資優生來挑戰，但是仔細看了網站上的題庫，發現很有限，數字和受限在 0 (正負數加減)、3 (小數加減)、21 (整數加減)、99 (整數加減)，且提示的位置數量皆是固定的，其實可以利用電子白板軟體來重新設計教材，除了改變數字群及數字和外，也改變提示位置，看看此活動能蹦出什麼火花 (In1112-08)

伍、討論

最直接影響學生數學學習表現的，便是教室內的課程實施，尤其是教師實施的數學問題類型與其實施方式(徐偉民, 2011; Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2007)。以此觀點來看美麗老師在資優資源班數學課程的實施，發現她採用高認知的數學問題為主、以開放探究為主要的實施方式。這樣的數學課程實施，不但讓學生以高認知的方式來學習高認知的問題，而且過程中強調了推理、規律尋找、臆測、檢驗等歷程，並從中獲得相關的數學知識與能力。這樣的課程實施符合了資優生好奇、喜歡挑戰與學習能力佳等特質，也符合資優教育目標中強調適性發展的主張(教育部, 2008)。美麗老師的課程實施，明顯的是以學生為中心，注重學生的思考與理解，這符合了目前對於數學教學的主張(如 Anderson, 2003; Hudson & Miller, 2006; Kilpatrick & Silver, 2000)：在過程中營造(設計)一個有助於刺激學生思考的環境(問題)、設計學習與解題的活動、並提供解題時的引導與支持。這樣的課程實施，強調學生主動參與數學的學習，以及引導學生在有證據的基礎下進行推理、臆測與證明(NCTM, 2000)。

Maker 和 Nielson (1995) 曾提出的資優「教—學模式特性」。特性包含：1.有明確的目的或是領域的焦點，且不會只有單一的面向；2.有明確的或隱含的關於學習者特性的假設，以及教與學過程的假設；3.能引導發展出特定的日常學習經驗；4.定義這些學習活動的型態或條件；5.有關模式發展及其有效性評鑑的相關研究。觀察美麗老師的教學發現富含上述特性，且影響美麗老師數學課

程實施的因素，最主要是來她個人對於數學教與學的觀點，以及對於學生學習特性的瞭解。超過 20 年以上的資優數學教學經驗、經常在科展比賽中帶領學生獲得佳績、以及擔任輔導團種子教師等經驗，使得美麗老師有較多的機會吸收數學教學相關的知識，對資優數學的教學與學習有明確的主張與方向，同時也瞭解資優生的學習特性。因此，這兩個因素變成為她在資優數學課程設計與實施時的主要考量。這樣的情形雖與許多研究的發現類似(徐偉民, 2011; Remillard, 2005; Stein et al., 2007; Tarr et al., 2008)，但也有不同的地方。例如：研究指出教師在數學課程實施時，對教科書有很高的依賴性(徐偉民, 2013; Grouws et al., 2004; Lloyd, 2008; Remillard, 2005)，但教科書卻不是資優班教師實施資優數學課程時的考量。這可能是因為目前並沒有制式的數學資優課程或教科書，而且美麗老師長期以來有閱讀與蒐集合適課程內容的習慣和經驗(如購買相關書籍與教具、參加研習與科展等)，所有資優數學課程的內容(課程主題與相關的數學問題)，都是她根據自己對於數學教學的觀點與資優學生的學習特性，來自編或加以改編，這就是為什麼教師個人與學生兩個因素是其影響課程實施的主因。但這是否代表其他資優資源班教師課程實施與考量的情況？其他資優資源班數學教師是否有蒐集合適課程內容的習慣？他們如何發展自己的數學課程？他們實施資優數學課程的情形是否與美麗老師相同？這都值得進一步探討，因為這都是影響資優生數學學習成效的關鍵。

陸、結論與建議

一、結論

本研究以數學問題為單位，從數學問題的類型和實施方式兩個面向，來瞭解個案教師數學資優課程實施的情形，以及其實施時考量的因素。在歷經一年的觀察、訪談與分析後有下列具體發現：

(一) 個案教師使用的數學問題類型，超過 9 成以上是屬於高認知的數學問題，尤其以沒有固定解題方法和充滿挑戰的作數學型問題為主，低認知問題所佔的比例很低。在數學問題的實施上，個案教師均衡地採用師生共同探究與學生自行探究兩種方式，但無論採用哪一種方式實施，個案教師在過程中都提供學生開放探究的機會，學生必須透過推理、臆測、檢驗等歷程，才能解決高認知的數學問題。意即，個案教師讓學生以高認知的方式，來學習高認知的數學問題。

(二) 在考量因素方面，本研究發現個案教師在實施資優數學課程時，主要考量的是教師本身和學生的因素，尤其是個案教師對於資優數學教學與學習

的觀點，以及考量到資優生好奇、喜歡挑戰等學習的特性。而脈絡因素與課程因素的個案教師課程實施的影響不大，但個案教師仍感受到教學時間的限制與壓力。

二、建議

本研究根據研究發現提出以下三點建議，供未來研究者或現場教師參考。

(一) 在研究的議題上，數學課程實施的研究議題，目前在國內外都屬於起步的階段，相關的研究並不多，在資優數學課程領域更是少見，但資優數學課程實施卻是影響資優生數學學習的關鍵。因此，建議日後的研究這可以持續探討相關議題，以本研究所提出的分析單位與面向來擴大研究對象，或是發展新的分析類別（如教學時間的使用）來進行探究，以更瞭解教室內資優數學課程實施的情形，並進一步探究對學生數學學習的影響。

(二) 本研究發現，由於個案教師對資優數學教學的長期興趣與投入，所以發展出的資優數學課程，讓資優生以高認知的方式學習高認知的數學問題，但其他資優資源班數學教師的情形如何？他們如何發展自己的數學課程？他們發展的資優數學課程是否符合學生的需求？

(三) 在資優數學課程實施考量的因素上，由於個案教師的獨特性，日後可以以不同背景與教學經驗的資優教師為對象，來探討其課程實施時考量因素的異同，以及考量因素之間的相互關係，相信可以提供相關師資培育機構與資優資源班教師專業發展之參考。

參考文獻

- 王玉品、徐偉民（2009）。一位國小教師面對數學教學改革的抗拒和改變。**科學教育學刊**，17（3），233-253。
- 石修銘（2013）。國小數學資優生在樣式覺察上之解題表現（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系，臺北。
- 林佩瑩、王振德（1998）。國小資優教育教師專業能力之分析研究。**特殊教育研究學刊**，16，443-462。
- 吳耀宗（2010）。國小資優資源班課程設計與教學實施之研究（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學特殊教育學系所，彰化。
- 郭美如（1998）。後設認知的教學成效及其相關變數之分析--以小六及國一數學資優生為對象（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學科學教育研究

所，臺北。

郭靜姿(2000)。談資優學生的特殊適應問題與輔導。**資優教育季刊**，**75**，1-6。

郭靜姿、賴翠媛(2015)。資優教育課程設計教學模式運用。載於郭靜姿主編，**資優教育課程設計與教學模式運用實例**(頁1-5)。臺北：華騰文化。

侯雅齡(2010)。激發資優生對知識的熱忱—數學資優課程應有的調整。**南屏特殊教育**，**1**，61-69。

教育部(2008)。**優質教育白皮書**。臺北：教育部。

教育部(2010)。**特殊教育課程教材教法及評量方式實施辦法**。取自 <http://law.moj.gov.tw/LawClass/LawAll.aspx?PCode=H0080031>

徐銘基(2009)。**發展國小資優兒童數學教學方案歷程研究—以線對稱為例**(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學自然科學教育學系碩士班，臺北。

徐偉民(2011)。三位六年級教師數學課程實施之比較。**教育研究集刊**，**57**(2)，85-120。

徐偉民(2013)。國小教師數學教科書使用之初探。**科學教育學刊**，**21**(1)，25-48。

陳廉偉(2009)。**發展國小資優兒童數學教學方案歷程研究**(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學自然科學教育學系碩士班，臺北。

黃楷茹(2004)。**透過教室言談展現數學課堂中資優生的探究思考歷程**(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學特殊教育學系碩士班，臺北。

連安青(1999)。小學數學新課程之實施：一位小學教師的實作與反省。**課程與教學**，**2**(1)，35-48。

楊麗華(2000)。「合作—省思」數學教學活動方案對國小資優兒童解題能力與數學態度影響之研究(未出版之碩士論文)。臺北市立師範學院國民教育研究所，臺北。

蔡典謨(1997)。資源整合與資優教育。**資優教育季刊**，**64**，6-10。

蔡依伶(2010)。**國小四年級數學資優生實施建構取向加速教學之行動研究**(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東。

- 歐用生 (2000)。內容分析法。收錄於黃光雄、簡茂發編著，**教育研究法** (頁 229-254)。臺北：師大書苑。
- 劉祥通、陳明聰、徐偉民 (2015)。資優數學課程設計與教學模式運用實例。載於郭靜姿主編，**資優教育課程設計與教學模式運用實例** (頁3-5)。臺北：華騰文化。
- 劉晉璋、劉祥通、康淑娟 (2010)。國小資優生在時分針問題之解題表現分析。**資優教育季刊**，**117**，33-40。
- Anderson, C. W. (2003). How can schools support teaching for understanding in mathematics and science? In A. Gamoran, C. W. Anderson, P. A. Quiroz, W. G. Secada, T. Williams, & S. Ashmann (Eds.), *Transforming teaching in math and science: How schools and districts can support change* (pp. 3-21). New York, NY: Teachers College.
- Benbow, C. P. (1991). Mathematically talented children: Can acceleration meet their educational needs? In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 154-165). Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Grouws, D. A., Smith, M. S., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. K. Lester, Jr. (Eds.), *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 221-267). Reston, VA: NCTM.
- Grouws, D. A., Tarr, J. E., Chávez, Ó., Sears, R., Soria, V. M., & Taylan, R. D. (2013). Curriculum and implementation effects on high school students' mathematics learning from curricula representing subject-specific and integrated content organizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(2), 416-463.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhabit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.
- Huntley, M. A. (2009). Measuring curriculum implementation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 355-362.

- Hudson, P., & Miller, S. P. (2006). *Designing and implementing mathematics instruction for students with diverse learning need*. Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Hsu, W. M. (2013). Examining the types of mathematical tasks used to explore the mathematics instruction by elementary school teachers. *Creative Education*, 4(6), 396-404.
- Jacobs, J., Gamier, H., Gallimore, R., Hollmgsworth, H., Givvin, K. B., Rust, K. (2003). *Third international mathematics and science study 1999 video study technical report volume 1: Mathematics technical report*. U. S. Department of Education, Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Johnson, D. T. (1994). Mathematics curriculum for the gifted. In J. VanTassel-Baska (Ed.), *Comprehensive curriculum for gifted learners* (2nd ed.) (pp. 231-261). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Kitano, M. K., & Kirby, D. F. (1986). *Gifted education: A comprehensive view*. Boston, MA: Little Brown & Co.
- Kilpatrick, J., & Silver, E. A. (2000). Unfinished business: Challenges for mathematics educator in the next decades. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 223-235). Reston, VA: NCTM.
- Lloyd, G. M. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 63-94.
- Maker, J. C., & Nielson, A. B. (1995). *Teaching models in education of the gifted*. Austin, TX: Pro-ed.
- Maker, C. J. (2005). *The DISCOVER Project: Improving assessment and curriculum for diverse gifted learners*. Retrieved from <http://www.gifted.uconn.edu/nrcgt/reports/rm05206/rm05206.pdf>
- McClure, L. (2001). Mathematics. In D. Eyre & L. McClure (Eds.), *Curriculum provision for the gifted and talented in the primary school: English, math, science and ICT* (pp. 64-89). London: David Fulton Publishers.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS*

2003 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Reis, S. M., Burns, D. E., & Renzulli, J. S. (1992). *Curriculum compacting: The complete guide to modifying the regular curriculum for high ability students*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricular. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246.

Sheffield, L. J. (1994). *The development of gifted and talented mathematics students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards*. Retrieved from <http://www.gifted.uconn.edu/nrcgt/reports/rbdm9404/rbdm9404.pdf>

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.

Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal*, 46(2), 501-531.

Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, Ó., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.

Tarr, J. E., Grouws, D.A., Chávez, Ó., & Soria, V. M. (2013). The effects of content organization and curriculum implementation on students' mathematics learning

專論

in second-year high school courses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(4), 683-729.

Tomlinson, C. A. (2005). Quality curriculum and instruction for highly able students. *Theory Into Practice*, 44(2), 160-166.

VanTassel-Baska, J. (2003). *Curriculum planning and instructional design for gifted learners*. Denver, CO: Love Publishing.

A Case Study on Mathematics Curriculum Implemented in a Gifted Class of an Elementary School

Wei-Min Hsu * Chia-Ping Chen ** Kuei-Fang Tsai***

The purpose of this study was to investigate how an experienced elementary school teacher implemented her mathematics curriculum in a fifth-grade gifted class. At the same time, the study also identified what factors she had considered from her more than 20 years' teaching. A case study approach was used. All data collected included classroom observations and teacher interviews. The findings indicated that most of the tasks she used were high-level cognitive demands requiring students to explore and understand the relevant concepts and relationships. She implemented the tasks both in teacher-students cooperative enquiry and students-self enquiry. She also provided plenty opportunities for students to reason, conjecture, and check their own thinking when they worked on the tasks. Her main considerations were based on her learned teaching experience, such as her viewpoints about the target curriculum and her students' learning characteristics. Other factors like learning contexts and mathematics curriculum had less influence on her teaching. However, the limited teaching time and the feeling of time pressure were the main concerns in her curriculum implementation.

Keywords: elementary school, gifted resource classroom, mathematical problem, mathematics curriculum implementation

* Wei-Min Hsu: Professor, Department of Science Communication, National Pingtung University

** Chia-Ping Chen: Teacher, She-Pi Elementary School of Pintung County

*** Kuei-Fang Tsai, Assistant Professor, Department of Special Education, National Pingtung University

Corresponding Author: Kuei-Fang Tsai, e-mail: fanger@mail.nptu.edu.tw

