課程與教學季刊　2015, 18(4),頁 29～56

# 以教學反思探究一位高中資深數學教師教學用數學知識的內涵與適應

卓益安*　金　鈐**　邱顯義***

本研究旨在探究一位資深教師教學用數學知識（Mathematical Knowledge for Teaching）的內涵與適應。首先針對個案教師進行教學前訪談，以及課室觀察和錄影；次則透過「高中數學教學討論會」以分析個案教師數學教學之核心活動，並形成訪談問題；最後則進行個案教師的訪談及教學反思。結果發現：第一、個案教師的數學和學生知識（Knowledge of Content and Students）是指他能夠知道學生學習過的數學技能、數學知識與解題策略；數學和教學知識（Knowledge of Content and Teaching）是指教師能夠將課堂教學的數學內容排序；數學和課程知識（Knowledge of Content and Curriculum）是指教師能夠指出不同的數學概念被安排在哪個年級的數學課程之中；共通數學知識（Common Content Knowledge）是指個案教師能夠自行設計並且解出這些數學問題與任務；專門數學知識（Specialized Content Knowledge, SCK）是指個案教師能夠選擇和發展合適的表徵與例子以解釋數學概念、由二維類推到三維，以及組織連結不同概念；眼界數學知識（Horizon Content Knowledge, HCK）是指個案教師能夠知道哪些數學知識是學生需要卻未編入課本。第二、個案教師在教學反思後，其 SCK 與影片中其他兩位案例教師的 SCK 產生適應（adaptation），有些產生同化，有些則調適為 HCK。這樣的教學反思使得教師的 SCK 成為下次教學行動的基礎，也使得教師達到反思即行動（reflection-as-action）的狀態。

關鍵字：教學反思、數學教學核心活動、教學用數學知識

*　作者現職：國立臺灣師範大學科學教育研究所博士班生
**　作者現職：國立臺灣師範大學數學系教授
***　作者現職：臺北市立建國中學數學科教師

通訊作者：卓益安，e-mail: scottie@hcvs.hc.edu.tw

# 壹、前言

在教師專業發展的研究中，學習教學（learning to teach）是一個極受關注的議題（Brown & Borko, 1992; Carter, 1990; McDiarmid & Clevenger-Bright, 2008），因為學者們體認到，不管是進入教育學程的職前教師或是教學年資超過十年的在職教師，教學發展是教師畢生的功課。依此，學者們開始探討教師需要哪些專業內涵才能夠勝任教學工作呢？饒見維（1996）指出，教師專業內涵是指教師所必須具備的各種內在知能條件，它包含認知面（e.g., 知識、技能、思考、理解）和情意面（e.g., 態度、信念、價值），而且它們會在教學歷程中持續不斷地轉變。另一方面，McDiarmid 與 Clevenger-Bright（2008）提出「教師容量或教師收容力（teacher capacity）」來詮釋教師內在知能，他們強調教師必須擁有的專業內涵，包含知識（knowledge）、實務技能（craft skills）以及氣質與性向 （dispositions），而且它們具有接受、持有與吸收的能力，並且，更重要的是，它們都具有發展的潛力。

在課堂教學中，教師的認知面和情意面必然會彼此相互影響（陳霓慧，2006；饒見維，1996；Cooney, 1994; McDiarmid & Clevenger-Bright, 2008），然而，Fennema 與 Franke（1992）認為應該把焦點放在教師知識，因為教師的知識品質不僅會影響教學，亦會影響學生學習。Brown 與 Borko（1992）整理教師學習教學的文獻發現，倘若教師學科知識不足或是理解不深時，教師教學會缺乏信心，教師不僅會難察覺學生學習所犯的錯誤，而且也容易導致學生錯誤理解。這意味著，教師學科知識的品質、廣度與深度會影響學生學習。另外，有學者（Berliner, 1986, 1988; Chinnappan & Lawson, 2005; Leinhardt, 1983; Borko & Livingston, 1989; Leinhardt & Simth, 1985）比較專家教師與生手教師的教學發現，專家教師的教學會優於生手教師的原因有：(1)專家教師會在教學中提出認知負載（cognitive load）較低的例子幫助學生學習；(2)專家教師的教學展現出更廣且更深的學科知識；(3)專家教師儲存與組織的學科知識更為精緻，知識之間不但彼此相互連通而且緊密，所以，當他們面臨教學問題時，知識取出不但更快速且教學效能更高。因此，這些能夠提高教學效能並且可以幫助學生學習的學科知識才是教師所需要的。

我國教育部於 2012 年 12 月公布的「中華民國師資培育白皮書」中提到，為了輔導與支持職前教師與初任教師發展他們的教學，師資培育部門應該要透過研究資深教師教學，以建立資深教師的教學資料庫，提供職前教師與初任教師教學專業發展的基礎，並且期望能夠形塑我國教師的「教學中知識（knowledge-in-practice）」（教育部，2012）。另外，資深教師在認知、情意或是社會層面的教學概念皆有根深蒂固的觀念與作為，但是，許秀聰（2005）與陳

芳如（2008）都發現他（她）們只要有一個層面的刺激，可能就會牽一髮而動全身，連帶影響其他層面的轉變，進而深化為教師教學所需的專業知識。所以，在探究資深教師教學中使用的知識的同時，也可能發現能夠觸發他（她）們教學發展的學科知識，當然，數學教師也不例外。

本研究想要探究數學教師教學中使用的知識，特別是其中的「數學品質」（mathematical quality），那又為何選擇資深高中教師為研究對象？這與高中數學課程內容的抽象度以及課堂教學的數學複雜度有關。眾所周知，國內高中階段學校數學課程的內容，無論在數學知識與結構的深度、廣度與抽象度方面，都比國中和國小階段的內容困難得多。因此，若以數學的觀點來看，高中的課堂數學教學活動也會相對的複雜許多。這會使得在實際進行課堂數學教學時，對高中數學教師數學與教學專業素養的期待與要求也就比較高。同時我們也瞭解到，資深教師對於數學課程縱向與橫向內容的掌握會比較精熟，而課堂教學也會比較穩固、一致。所以，研究者選擇一個數學味道相當濃厚的數學教師知識理論「教學用數學知識」（Mathematical Knowledge for Teaching, MKT）來詮釋他們的教學實務，而且透過高中數學課程內容的抽象度以及課堂教學的數學複雜度，將能夠凸顯 MKT 中的內涵。對研究者來說，也就比較容易感受到、覺察到課堂教學活動中的數學味道或數學品質，才可能試著做到「對數學教學核心活動作數學分析」（a mathematical analysis or mathematical analyses of core activitiesof mathematics teaching）（Ball & Bass, 2000, p. 89; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001, p. 453）的建議。

基於上述原因，研究者組織一個「高中數學教學討論會」，邀請一位諮詢教師一同觀看、比較與分析高中資深數學教師的課堂教學錄影，討論與確認他們核心數學教學活動並且整理討論會提出的實務問題。接著，研究者提供資深教師自己與兩位案例教師的教學錄影來刺激、促進教師的教學反思，一方面探究資深教師教學中使用的知識的內涵，一方面以 Piaget 提出的個體適應（adaptation）理解這些知識內涵在資深教師的教學反思後可能產生的質變。由於本文關心的學科領域是數學，故以下所述及之「學科」均以「數學」取代。

# 貳、文獻探討

## 一、教學用數學知識

Shulman 於 1986 年針對教師應具備的內容知識提出數學教學知識（Pedagogical Content Knowledge, PCK）的概念，並將教學用內容知識（Content Knowledge for teaching）區分成以下三大類別：(1)數學知識（Subject Matter

Content Knowledge, SMK）;(2)PCK；以及(3)課程知識（Curriculum Knowledge）。在以上三種內容知識當中，以 PCK 最為重要，因為 PCK 是針對數學知識在教學過程中進行轉化之歷程，以提供學生學習。Ball 與 Bass（2000）指出，PCK 不僅將數學知識和學習者、學習以及教學綑綁（bundle）在一起，而且綑綁後的知識可以提供教師教數學的一個重要資源，它包含教師預期學生可能遭遇的困難和多樣化的處理方式。但是，Ball 與 Bass 也發現，綑綁的知識不能夠永遠賦予教師面對所有教學困境時所需的彈性，因為，在真實教室中，數學和教學會持續動態地互動，使得教師的 PCK 無法完全預期與掌握到學生的數學思考與數學內容在情境中的發展方向。教師在面對新的情境時要如何能夠同時兼顧內容、學生、學習和教學，並且培養調動不同領域知識的能力，以應付多變的教學情境。所以，研究焦點不應只是理解教師需要知道什麼，而是要聚焦在教師在情境中知道什麼知識並且如何使用知識（Ball & Cohen, 1999; Lampert & Ball, 1999）。

Ball、Thames 與 Phelps（2008）以 PCK 為基礎建立 MKT 的初始模型，它以數學知識取代內容知識並且強調研究的聚焦是：教師在「教學」中知道與使用哪些數學知識，而非「教師」本身知道哪些數學知識。她們藉此發掘教學所需的數學知識以及它在數學教學中扮演的角色，亦就是直接研究教師教學實務中所用的與所需要的數學（mathematics in and for practice）的本質與內涵（Ball & Bass, 2000）。她們嘗試檢視課程且確認教師數學課堂中使用的數學教學核心活動，例如，教師選擇具有數學想法的表徵；評估、挑選且調整課本內容；帶領學生具有數學生產性的討論等。並且，她們探討這些活動的數學需求（mathematical demands）。所以，MKT 是一種實務取向的理論（practice-based theory），MKT 不僅能夠幫助數學教師解決數學教學問題，亦能夠建立數學教師教學中使用的知識，更進一步的理解數學教師教學中需要的知識。下圖 1 是她們提出的 MKT 卵形領域圖（oval domain map），它不僅分為 PCK 與 SMK，而且還分別細分了它們。其中，PCK 包含數學和學生的知識（Knowledge of Content and Students, KCS）、數學和教學的知識（Knowledge of Content and Teaching, KCT）與數學和課程的知識（Knowledge of Content and Curriculum, KCC）；SMK 包含共通數學知識（Common Content Knowledge, CCK）、專門數學知識（Specialized Content Knowledge, SCK）以及眼界數學知識（Horizon Content Knowledge, HCK）。

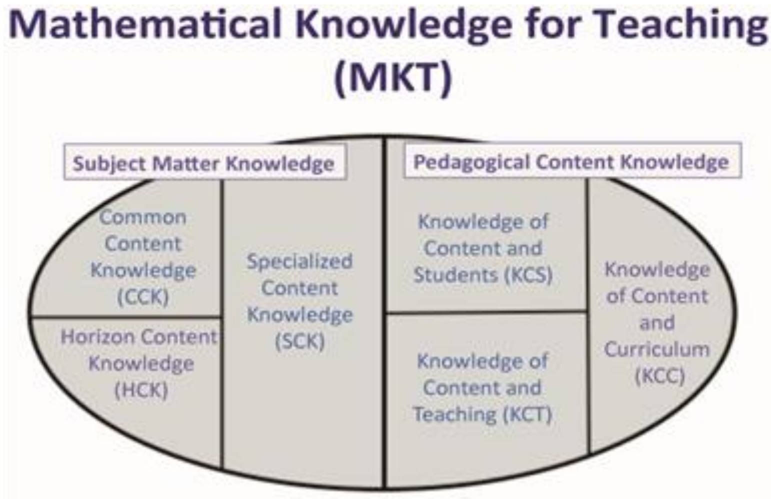



圖 1 MKT 的領域圖（引自 Ball, Thames, Phelps, 2008, p. 403）

從 KCS、KCT、KCC 的英文全文可以理解到，MKT 模型以「和」（and）分別將學生、教學、課程與數學連接起來是強調數學教學要以教學主題的數學內涵為主。換句話說，KCS 是與學生對於特定教學主題的數學思考有關，例如，在這某個特定主題中，教師要知道哪些問題或任務會使學生覺得有趣、容易、困難或困惑，或者教師要能夠知道學生的先備知識和迷思概念；KCT 則涉及某個特定教學主題的數學概念與教此主題內容的教學原則與原理的理解，例如，教師要能夠安排教學內容的順序、選擇起始例、知道何時該停頓且做出更多釐清、在何時提問新問題促進學生更深層的數學思考等；KCC 是指 Shulman 提出的課程知識，意指教師要能夠掌握課程綱要或學校數學對於特定教學主題學生學習的要求，例如，學校期望學生某個特定主題時要習得哪些數學知識、技能。

接著，關於 SMK 的部分，CCK 是指不限於教學環境下使用的數學知識與技巧。其中，「共通的」（common）意指它是各種環境下廣泛使用的數學知識；然而，這並不表示每個人都有這些知識，而是強調它不會只依附於教學。這種知識在其他工作中也需要，但並不是教學所特有的，但是，如果教師缺乏這類知識，教學也會受到阻礙。例如，教師要能夠求出數學問題的正確答案、識別學生答案是否正確、指派學生練習、正確使用數學名詞、術語和符號。此外，SCK 是指教學獨有的數學知識與技巧，它是教學中所需的一種獨特的數學知識。SCK 亦是純粹（pure）數學知識的專門形式，其中，「純粹的」是指，它並未與教學知識混合（Ball, Charalambous, Thames, & Lewis, 2009），所以，它不同於 Shulman 提出的 PCK；另外，「專門的」（specialized）是指，除非在教學

的環境下，否則它是不會被需要或使用的。例如，教師能夠判別學生的解法可否適用於一般問題、區分運算多樣的詮釋方式、尋找學生數學錯誤模式、說明數學概念間的異同、有效地選擇與製作數學上的表徵說明數學想法等。最後是位於圖形左下角的是 HCK，它是指某種數學認知，亦是一種數學察覺與數學理解，使得教師能夠知道如何跨越不同的數學主題。它好比是數學周邊影像（peripheral vision）的中心，一種數學教學所需要具備的較大視野，亦是將教學放置在較大的數學視野（landscape）的一種察覺。Ball 與 Bass（2000）比喻具有 HCK 的教師如同一位有經驗且具有鑑賞能力的旅行家，而非普通的導遊，對高等知識具有貫穿數學結構的洞察力，能夠賦予教師對教學工作具有更廣的、更特別的影像與引導。例如，教師如何引導學生思考當一個正數除以越來越小的正數，所得的數值將會越來越大，這樣的說法正確嗎？此種現象有數學意義嗎？是否可以延伸到未來的數學學習？回答這類問題，就與 HCK 有關連。

在國外，有學者（Charalambous, 2008; Hill, 2010; Hill et al., 2008）發展 MKT 某些子領域的測驗，發現 MKT 得分越高的教師，教學的數學品質越好。Hill 與 Ball（2004）讓教師學習 CCK 和 SCK 後發現，他們的教學數學品質不但提升，也使得學生數學學習產生正面效果。此外，Hill、Ball 和 Schilling（2008）發現 KCS 的學習影響與改變教師原本的教學設計，更能夠引導學生正確的數學思考。然而，在臺灣，MKT 研究仍處於初探階段，陳亭瑋（2010）、曾名秀（2010）、沈湘媛（2011）與林培棠（2011）皆以個案研究的方式探討高中數學教師 MKT 的內涵，發現 MKT 各子領域間的邊界有交錯也有相互流動的情形。但是，她們都未觸及教師經由反思後，哪些知識可能會發生質變以理解教師知識轉化的路徑。也就是說，倘若我們有意圖要發展 MKT 的測驗，理解教師知識的穩定因素是重要的，否則設計出測驗某知識領域的試題可能又與其他知識領域產生關聯，會導致測驗不準確的情形。

## 二、反思理論

教學是一門經驗與反思且重學習的專業（Hager, 1996）。好的教師應該是一位教學反思的實踐者，Sellick（1996）將教學反思比喻為「人必須透過鏡子才能看到視野全景」，其中鏡子的功能就是教學者反思的作用所在。Calderhead 與 Gates（1993）主張，反思能使教師分析、討論、評估並轉變他們的教學實務，而且能使教師對於本身的專業發展以及教學自主負責，進而促進教師發展教學實務中的個人知識。因此，教師專業發展的模型架構皆是以反思為基礎，顯示反思不但是觸發教師發展專業的媒介，更是推動教師專業持續發展的催化劑，也因此，反思在教師專業發展過程中扮演不可或缺的角色。

大多數探討反思的文獻皆以 Dewey（1933）與 Schön（1987）的理論為兩

大根源基礎。Dewey 認為，個人在思考的同時也會改進思考，於是提出反省式思考（reflective thinking），他並且認為反思就是，對於新概念或既有知識依據知識或信念的基礎與可能產生的結論進行積極、審慎並持續地思考。接著，他認為例行性行動與反思行動是有差異的，前者是經由衝動、傳統或權威所引導的行動；後者則是包含對於信念與實務的審慎考慮。他進一步說明反思的五步驟包括：(1)心中浮現對於問題的可能解法；(2)針對面臨的困境設立或界定確切的問題；(3)提出假設；(4)進行推理或推論以確認假設是否為問題的可行解；(5)以行動驗證假設。每個步驟的思考都有助於再澄清概念，並導向解決問題，但是這五個步驟的順序並非固定不變。因此，反思並不是一系列的程序或步驟，而是面對問題並處理問題的整體方式。

Schön（1987）認為，反思是教師建構並關於引導行動的知識與意義之方法。他提出行動中的反思（reflection-in-action）以及對行動的反思（reflection-on-action）。前者是教師進行教學活動的過程中的當下立即反思，因為，教學是一種必須在行動中知曉（knowing-in-action）的專業；後者則是指教師於教學活動之後，回顧描述當時的直覺認知與行為，並且對於整個教學的事後省思，可使教師對於教學理解不斷地自我批判、驗證以及再建構，以促使新行動的產生。所以，對行動的反思在教師專業發展過程中是重要的專業能力。Bleakley（1999）並以 Schön 的兩種反思為基礎，提出反思即行動（reflection-as-action）的概念，亦即反思是個人主動融入外在世界或情境所產生的效果，所以反思的主體不在於個人，而是在於整體事件，包含行動的脈絡情境。

由 Dewey（1933）和 Schön（1987）的論述可以歸納出幾個有關實務反思的意義：(1)反思是於實務脈絡中產生，進而提出、面對與解決問題的過程；(2)反思是理智、情感與熱情的結合，具有整體性，不能被簡化為只有技術或是思考的程序；(3)反思的過程即是思考與行動的結合；(4)個人如何反思，就會決定如何存在（引自周淑卿，2006，頁 180）。所以，個人反思能力的建構將引導下一步的行動，並且也是決定行動品質的關鍵。反思對於教師專業發展具有極高的價值，主要是因為教師實務知識的形成大多來自本身的經驗，或是對於各種生活及學習經驗反芻的結果。因此，教師本身最足以成為轉變個人理念與作為的促動者，當然，資深教師也不例外。

許多促進資深教師教學反思的研究發現：他（她）們如果有足夠的刺激，無論多麼資深的教師，教學知能都有機會改變與成長（莊上霖，2005）；另外，他（她）們會依據課程內容加入多元的教學策略，省思內容雖然大多以「學生」為主，但是省思層級偏向「描述層級」（江豐光，2005）；此外，資深教師的專業知能可以透過參與輔導實習教師的教學實務而直接發展，或是經由學習雙重

實務身份的轉換與反思而間接發展，並且經由在脈絡中不斷地進行反思，深化教學專業知識（陳芳如，2008）。可見，如果想要透過教學反思探討資深教師教學知能的內涵、轉換與發展，必須緊緊伴隨著他們的教學脈絡才有機會一探究竟。當然，教師知識也不例外。那麼，我們該如何探究資深教師教學用知識，並且期待發現能夠發展他（她）們教學數學品質的知識內涵呢？同上所述，資深教師的知識雖然穩固，然而，研究者認為資深數學教師的知識應該更能夠往教學實務面向的方向發生質變，當然，會是以數學品質的提升為主。所以，研究者認為，能夠讓資深教師內心產生激盪的方式也許是觀看其他資深教師的教學，因為資深教師的知識都是教學實務經驗的累積與長期反芻的結果，當資深教師觀看資深教師教學的同時，可能可使資深教師本身原有的實務知識與其他的資深教師的實務知識產生互動，進而使資深教師原有的實務知識的架構發生適應（adaptation），亦就是產生同化（assimilation）或調適（accommodation）。研究者期待此策略可使資深教師原有的實務知識產生調適，甚至成為教師新的實務知識。另外，研究者為了使資深教師能夠脫離「描述層級」的「對行動的反思」，我們嘗試組織一個高中數學教學討論會，集體觀看、比較、分析資深教師教學錄影，確認個案教師的數學教學核心教學活動，接著，研究者依據討論會的內容擬定訪談題目並且輔以兩位資深案例教師（example teachers）的教學錄影來促進教師教學反思，研究者希望藉由此策略能夠形塑出資深教師具有發展性的教學用知識。

# 參、研究方法與步驟

## 一、研究設計

本研究屬於個案研究，研究者組織一個「高中數學教學討論會」，集體觀看、討論、比較與分析個案教師的課堂教學錄影，確認他們的數學教學核心活動，企圖理解個案教師教學中所用的與所需要的數學知識。另外，討論會中邀請一位諮詢教師，他是一位教學年資將近 40 年的退休高中數學教師，他教學認真負責，數學知識豐富且具備課程的編輯能力。他在民國 72 年受到教育部邀請擔任我國第一次自編高中數學課程的編輯委員，並且於民國 84 年開放課本編輯之後持續擔任某書局高中數學課本編輯委員至今。研究者希望藉由諮詢教師的教學與課本課程編輯經驗，提供討論會實務方面的觀點。

## 二、研究流程

### （一）個案教師的背景與教學單元的確認

本研究報導的個案教師（甲師）畢業於某國立師範大學數學系，大學畢業

後，直接進入某國立大學數學研究所就讀，由於對數學研究有相當大的興趣，研究所畢業後於原校攻讀博士學位。博士畢業後，甲師先於一所中部公立高中任教三年，再轉至一所北部公立高中，目前，教學年資已達 11 年，甲師喜歡指導學生科展、具有輔導實習教師的經驗而且喜歡與同儕分享、討論數學教學的想法與心得。

關於課堂觀察與錄影的單元，個案教師因為學測複習因素表明只開放高二課堂，開放的單元有：平面方程式、空間中的直線方程式、重複組合以及數學期望值。為了刺激、活化甲師的教學反思，研究者嘗試讓甲師觀看兩位案例教師（example teachers）上述四個單元的教學錄影，他們分別為任教 28 年的乙師以及任教 19 年的丙師。

### （二）教學前訪談、課堂教學觀察和錄影

在入班觀察前進行一次訪談，內容著重在個案教師的教學準備、教學推理與課本內容的使用和批判，例如，如何安排內容的順序、那些主題不使用課本內容。另外，入班觀察期間，研究者不僅要拍攝個案教師的教學，亦要撰寫觀察札記。在每一節課堂結束後，研究者會立刻與個案教師討論課堂教學的情形並且將討論內容記錄下來。

### （三）觀看個案教師的教學錄影帶與教學後訪談

在觀看教學錄影期間，討論會成員一起觀看、討論、確認、分析個案教師的數學教學核心活動。最後，針對這些討論提出四類的訪談問題：第一類問題與特殊數學內容有關，例如，為什麼補充四面體最小體積問題；第二類問題與數學思考與解題的引導、培養、訓練，例如，如何引導學生思考四面體最小體積問題的解題策略；第三類是跨單元的整合性問題，例如，哪些數學主題會運用到算幾不等式；第四類是批判性與反思性的問題，例如，個案教師反思並且批判自己與兩位案例教師的教學。

教學後訪談會依上述訪談問題分為二個步驟：首先，研究者針對每一個訪談問題與個案教師一同觀看當時的教學錄影，以刺激資深教師回憶起當時的情境。研究者會先訪談個案教師每堂課的想法與意圖，再詢問訪談問題；第二，研究者會提供兩位案例教師的教學錄影，研究者先與個案教師討論他的教學與兩位案例教師的異同，再詢問他們各自教學的優缺點；最後，研究者請個案教師提出他的想法、意見與批判。

## 三、資料蒐集與分析

資料蒐集包含教材、場域筆記、教學訪談與課堂錄影帶。教材部分包含課

本、校用講義、教學手稿。場域筆記則由團隊成員紀錄教師每一節課發生的教學事件。教學訪談分為教學前訪談與教學後訪談兩個部分，訪談過程全程錄音。訪談檔案與課堂錄影檔案全部轉譯成文字檔，並由討論會成員相互校對內容。

資料分析將以課堂觀察為主，觀察前後的訪談資料以及文件資料為輔。首先，以時間為軸線，排列、比對個案教師課堂實際教學的內容，確認數學教學核心活動並且進行數學分析。接著，以 MKT 各子領域知識作為主要的編碼類別進行分類，分析與理解每個數學教學內容個案教師使用的知識與其內涵。

在研究結果的呈現，研究者以代號呈現資料形式（O 代表錄影觀察資料；I 代表訪談資料；D 代表文件資料）。例如，（甲-O-2009/09/04）表示甲師在 2009 年 9 月 4 日教學錄影的轉譯資料。由於資料頗多且篇幅有限，研究者選擇平面方程式的截距式與延伸的四面體最小體積問題進行報導，因為它的內容觸及了 MKT 各領域的內涵與適應。下圖 2 為甲師與兩位案例教師（乙師與丙師）在此單元中教學內容的排序，也依此顯示資深教師教學上的不同，實線表示課本內容，虛線則表示資深教師延伸補充的教學內容。

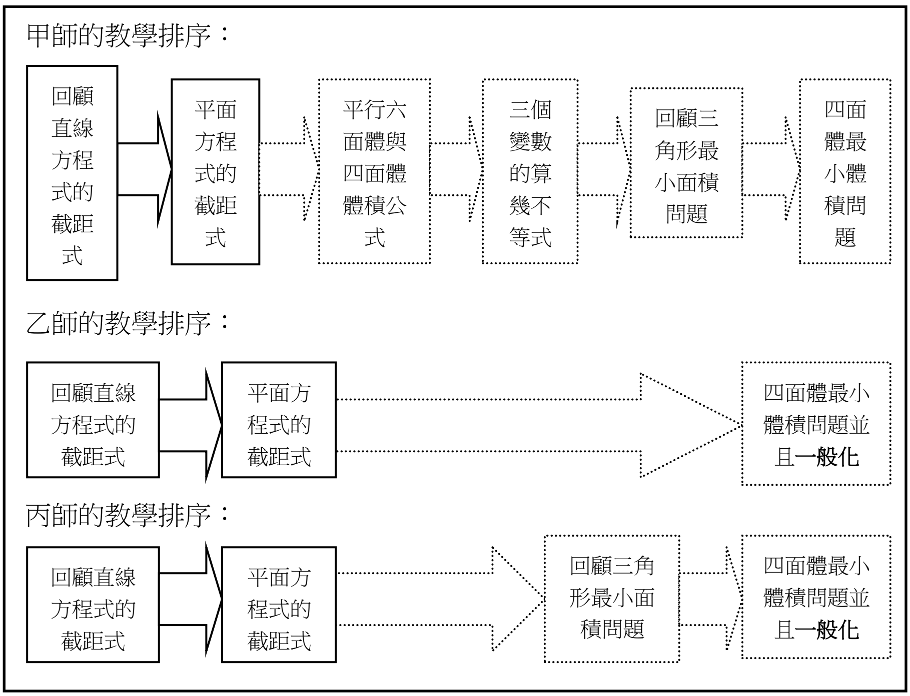



圖 2 甲師與兩位案例教師平面方程式的截距式之內容排序

由於本研究蒐集的資料多屬質性資料，教師的 MKT 乃是本研究關注的焦點。研究者初期透過個案教師課堂觀察、教學討論會的結果，逐步歸納出核心教學活動以及 MKT 各個子領域知識間的互動，以形成初步的發現。為了避免資料蒐集的單一方法、單一來源以及單一觀察者所造成的偏見，研究者使用三角校正法（triangulation）（Yin, 1994）做為資料分析的依據。本研究的三角校正分為兩種形式，一是資料來源的三角校正，二是分析者的三角校正。資料來源的三角校正是指研究者依據不同的資料來源，不同的時間點檢驗研究發現的一致性。另外，分析者的三角校正主要是以高中數學教學討論會為一資料分析的單位，討論會集體觀看、討論與分析教師教學，以形成與編撰訪談的題目，以確認教師行動背後的教學意圖與知識的運作。

### 四、增加研究品質與研究有效性

本研究採取下列幾項措施加強研究的有效性，首先，研究者參與觀察錄影工作並且與個案老師接觸並蒐集資料，共歷經 10 個月的時間；接著，研究者在每次集體聚會討論個案教師的教學期間，不僅提出不同層面的看法刺激研究成員討論，並且全程錄影與錄音，以利資料的整合與分析；另外，資料整理後的文稿皆經由不同的研究成員進行查核，並且針對不同方法與時間所獲得之資料以及不同研究者所持之觀點進行三角校正，這些都符合提高研究的可信性（Patton, 1990）。

## 肆、研究結果與討論

本節報導、描述與說明個案教師的數學教學核心活動，並且從中討論這些活動與哪些 MKT 子領域有關以及描述與說明它們的內涵以及可能的適應。

### 一、與 KCC、KCS 和 KCT 有關的數學教學核心活動：教師參考課程綱要、課本與校用講義的內容，挑選與評估學生應習得的內容後決定排序

甲師以自己撰寫的手稿當教材，內容不僅涵蓋課本中的數學主題，而且也涵蓋校用講義的部分內容，他表示：「我的手稿主要是在這些單元中學生應該要學哪些內容、哪些知識、哪些技巧。課本是我重要參考的東西，當然有一些老師不用課本，而我是這樣，有時候用我的例題，有時候用課本的，有時是講義（指校用講義）的，我通常是這樣搭配。（甲-I-2009/12/04）」所以，他知道學生在這些單元中應該需要知道、學習哪些數學知識與技巧，而且也會從課本中、校用講義中挑選一些問題與任務讓學生練習、探索與學習，有些時候甲師則會自行設計問題或任務讓學生練習。接著，甲師也強調，課本雖然是他的參考依據，但是他仍會適時地增加或補充一些數學內容，他就以補充外積為例說明：「我

想課本中的內容與解題方法可能是課綱的緣故吧！但是，如果每次求平面的法向量都要用課本裡面的方法來求，我覺得是不濟事的，會變得比較麻煩。反正，就以外積來做，它有實際上重大的需要。」由此可見，手稿內容是個案教師課堂教學整體考量的產物，這意指個案教師知道在此特定教學主題中課程綱要對於教授學生的數學內容、數學知識、數學技能有所規範，也意指個案教師對於特定教學主題的數學理解與課程綱要所制定的內容結構有所不同，但是，個案教師仍以自己的理解方式評估與挑選課本與校用講義的內容，並且補充自己認為學生在此特定教學主題中應該要習得的數學概念、數學技巧與數學知識。

關於內容排序的部份（見圖 2），甲師在平面方程式的截距式後補充了四面體體積公式、算幾不等式與四面體最小體積問題，甲師表示：「我教這幾年下來已經有我自己一套體系在裡面了，我就按照我自己的體系來。像截距式會產生四面體最小體積的問題，而且它們（指四面體體積公式與算幾不等式）都會用到，雖然，三個變數的算幾不等式要等到三年級才會講，但是，我總是要做個解釋。（甲-I-2009/12/04）」這顯示，個案教師知道四面體最小體積問題的解題需要四面體體積公式與算幾不等式，所以，他將此兩個內容安排在四面體最小體積問題之前。另外，甲師不同於兩位案例教師只將四面體體積公式與算幾不等式提供給學生後就進行解題，所以，甲師知道上述兩個數學內容是在教學歷程中的哪一個位置，他嘗試依照學生經驗給予數學上的解釋，最後，依照內容的數學內涵決定教學的內容排序。

綜合上述，教師知道哪些數學內容、數學知識、數學技能包含在課本或是校用講義之中，教師也知道某些內容並未符合課綱的規範，這些都是教師的 KCC。另外，教師依照自己對於教學主題的理解，挑選適合學生學習的內容，這就是 KCS。此外，教師將這些教學內容排序，這就是 KCT。這也表示，此核心活動與教師的 PCK 有關。

## 二、與 KCS、KCT、CCK、SCK 有關的數學教學核心活動：教師決定教學程序

甲師的教學程序大致上的依序是：教學回顧、引進課堂教學主題的關鍵想法或概念、教師示範例題、學生練習、教學主題總結與探索（見下圖 3）。

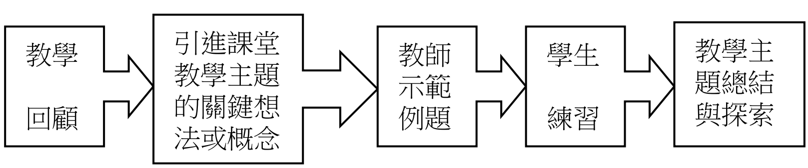



圖 3 個案教師的教學程序

## （一）教學回顧

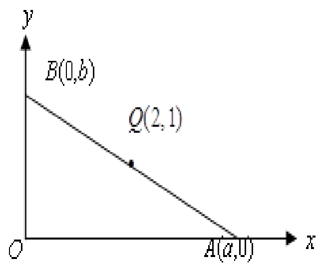
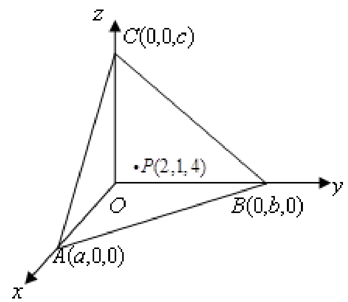
教學回顧是指，在課堂教學主題剛開始時，教師與教學主題相關的或者複習上一節課的數學想法、觀點、概念或技巧，或者針對數學問題會採用相仿的問題再與學生討論一次。由圖 2 可知，甲師分別先回顧直線方程式的截距式與三角形最小面積問題，才進入平面方程式的截距式與四面體最小體積問題。對此，甲師說：「學生在高一學過直線截距式，也學過兩個變數的（指兩個變數的算幾不等式），但是，他們老早就忘了（指三角形最小面積問題）。如果不說，會有點前不著邊，後不著地的感覺。（甲-I-2009/12/04）」可見，甲師回顧直線方程式的截距式是要引導出平面方程式的截距式，另外，補充四面體體積公式與三個變數的算幾不等式以及回顧三角形最小面積問題是為了要提供學生思考四面體最小體積問題的解法策略是否與三角形最小面積問題的解題策略相似。下表 1 顯示了甲師在三角形最小面積問題與四面體最小體積問題示範的解題歷程，這也顯示，甲師為何在四面體最小體積問題之前回顧三角形最小面積問題，因為它們的解題策略有相似之處，甲師希望藉此可引發學生思考四面體最小體積問題可能的解題策略。

經由上述討論，教學回顧主要是連結、引發、觸發學生已有的數學思考，也就是說，教師本身要知道在這些特定的數學主題中學生已有的數學經驗，以及他們已經學過的與習得的數學技能與數學知識，這些都是屬於教師的 KCS。

## （二）引進課堂教學主題的關鍵想法或概念

引進課堂教學主題的關鍵想法或概念是指，教師引導學生思考或講解數學主題的關鍵想法、觀點或概念與它們涉及的數學內涵。例如，在引進平面方程式的截距式的時候，甲師使用課本的例子「求通過 $P(2,0,0)$、$Q(0,3,0)$ 與 $R(0,0,4)$ 的平面方程式？」說明平面方程式的截距式的代數表徵是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，此時，平面方程式的 $x$ 截距、$y$ 截距、$z$ 截距分別是 $a$、$b$、$c$。而且，甲師說明平面方程式能夠轉換成截距式的條件是 $a$、$b$、$c$ 不能同時為 0，然而，他卻沒有說明截距式與一般式之間如何轉換？所以，當甲師看完兩位案例教師的教學後，他反思自己教學不足之處，他說：「我只給了例子推導，卻沒有說明平面方程式的截距式與一般式之間的關係。（甲-I-2009/12/04）」此外，甲師也批評兩位案例教師的教學，因為兩位案例教師在教學中反而有說明截距式與一般式如何轉換，可是他們都未提兩者互換的條件為何，所以，他在訪談中表示：「任何一個平面都可以寫出截距式嗎？當然不可以！0 不可以放在分母的地方，所以，什麼時候才有截距式，那當然是必須 $x$ 截距、$y$ 截距、$z$ 截距都不是 0 的時候才會有截距式，這一定要講！」這也顯示，甲師針對自己教學上的缺失進行反思，並且提出改進的方案，所以，他清楚知道此教學主題的關鍵想法或概念為何。

表 1 三角形最小面積問題與四面體最小體積問題的解題歷程與延伸探索

| | **三角形最小面積問題** | **四面體最小體積問題** |
|---|---|---|
| **內容** | 求通過 $Q(2,1)$ 的直線，與平面座標系的兩座標軸在第一象限所夾最小三角形 $\Delta OAB$ 面積？ | 求通過 $P(2,1,4)$ 的平面，與空間座標系的三個座標軸在第一卦限所夾最小四面體 $OABC$ 的體積？ |
| **課堂教學圖示** |  |  |
| **解法** | 令過點 $Q(2,1)$ 的直線方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，而且將點 $Q$ 帶入直線方程式得 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$。<br>由算幾不等式可得：<br>$\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}\Rightarrow\frac{ab}{2}\geq 4$<br>所以，$\Delta OAB$ 面積最小值是 4。等號成立的情況是：<br>$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=4,b=2$。 | 令過點 $P(2,1,4)$ 的平面方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，而且將點 $P$ 帶入平面方程式得 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}=1$。<br>由算幾不等式可得：<br>$\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{4}{c}}\Rightarrow\frac{abc}{6}\geq 36$<br>所以，四面體 $OABC$ 體積最小值是 36。等號成立的情況是：<br>$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=6,b=3,c=12$。 |
| **延伸探索** | (1)令點 $Q(x_0,y_0)$，它是線段 $\overline{AB}$ 的中點。<br>(2)線段 $\overline{AB}$ 的兩端點 $A$ 與 $B$ 分別是 $(2x_0,0)$ 與 $(0,2y_0)$。<br>(3)三角形 $\Delta ABC$ 最小面積是 $\frac{1}{2}(2x_0)(2y_0)$。 | (1)令點 $P(x_0,y_0,z_0)$，它是三角形 $\Delta ABC$ 的重心。<br>(2)三角形 $\Delta ABC$ 的三頂點 $A$、$B$ 與 $C$ 分別是 $(3x_0,0,0)$、$(0,3y_0,0)$ 與 $(0,0,3z_0)$。<br>(3)四面體 $OABC$ 最小體積是 $\frac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0)$。 |

這是平面方程式中兩個不同的代數表徵相互轉換的數學知識，它涉及兩者相互轉換的數學技能，也涉及它們之間能夠相互轉換的條件為何，這些都是純粹的數學知識，而且是專門用於平面方程式的教學之中，這就屬於 SCK。

## （三）教師示範例題

教師示範例題是指，教師說明、分析與討論課本中、校用講義中或者教師自行設計的數學任務，此時，教師不但嘗試引導學生進行數學解題，也分析與說明解題步驟。甲師課堂上使用的例題，一部分是參考課本與校用講義，一部份則是自行設計，他認為這些數學問題有兩個目的，一是能夠幫助學生熟悉基本操作，另一是要能夠引導學生的數學思考，他說：「反正就是目的，因為學生課堂上主要有一些要學會的操作，反正就是設計數字！設計一個有意思的題目不一定要很難，但是要漂亮。（甲-I-2009/12/04）」例如，甲師說明完四面體體積公式後，他提出一個問題示範給學生看：平面方程式 $E:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 與第一掛限所夾的四面體體積等於 $\frac{2\times 3}{2}\times 4\times\frac{1}{3}=4$ （甲-O-2009/10/21）。

## （四）學生練習

學生練習是教師結束一次示範例題或是結束一個教學主題後，提出與教學內容相仿的問題或任務要求學生練習。教師亦會視學生作答情形，提出講解或者只給予答案。例如，甲師示範四面體體積的求法後，他提出一個任務要求學生練習：請求出平面方程式 $E:\frac{x}{12}+\frac{y}{20}+\frac{z}{8}=1$ 與第一掛限所夾的四面體體積（甲-O-2009/10/21）。

不管是教師示範例題或是學生練習，這些數學問題與數學任務都是由個案教師挑選或是自行設計出來的，它們不但要符合課堂教學主題的關鍵想法或概念，也要符合班級學生的數學能力。因此，這兩個核心活動不但牽涉教師關鍵想法或概念的理解，也涉及教師對於班級學生數學能力的理解，所以，它們就和 SCK 與 KCS 有關。這些問題與任務也都是個案教師設計或挑選出來的，他當然可以算出正確答案，這就屬於教師的 CCK。

## （五）教學主題總結或探索

教學主題總結是指，教師整合與分析學生在此特定教學主題下習得的哪些數學知識、數學技能。例如，甲師歸納、比較、分析直線方程式與平面方程式的一般式、法向式和截距式（甲-O-2009/10/27）。探索主要是涉及這些數學知識、數學技能更深一層次的數學意義或是不同面向的延伸。例如，甲師期望學生能

夠嘗試思考四面體最小體積問題是否有其他的解法？他在課堂上提示說:「你們可以想一想這個問題有沒有其他解法，你們可以先嘗試從三角形最小面積問題有沒有其他解法開始，搞不好就可以套用過去喔。(甲-O-2009/10/27)」這樣的提示出現在數學教學之中，這是教師的 SCK。

然而，根據上圖 2 與表 1，兩位案例教師卻不同於甲師的探索面向，他們在四面體最小體積問題講解完後，都將平面上的點 $P(2,1,4)$ 符號化為 $(x_0, y_0, z_0)$ 的一般形式，推導出四面體 $OABC$ 最小體積的值是 $\frac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0)$，並且要求學生思考點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 與三角形 $\Delta ABC$ 之間有何關聯？甲師表明在課堂上從未這樣做過，他說：「坦白講，我真的沒這樣做過。(甲-I-2009/11/05、甲-I-2009/12/04)」他也承認他自己真的不知道點 $Q(x_0, y_0)$ 是線段 $\overleftrightarrow{AB}$ 的中點、也不知道點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三角形 $\Delta ABC$ 的重心。接著，他說：「我真的沒發現它是重心耶。我一直缺乏它到底在幾何上有什麼的意義，我也不知道 $Q(x_0, y_0)$ 是中點。(甲-I-2009/12/04)」此外，他提到：「這樣的結論與推理對學生其實蠻重要的，下學年開始，我會考慮讓學生想想看。」這表示說，甲師的 SCK 發生了質變，甲師看到了這兩個數學問題背後有同樣的數學規律的現象，他理解到「點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三角形 $\Delta ABC$ 的重心」是正確的，並且他也洞察到問題背後涉及的代數意義與幾何意義。更重要的是，他體會到表 1 中兩者之間的連結與數學理解的關聯，也有意圖在下次教學中嘗試將此次的連結與數學理解加入教學之中。這是一種更深、更廣的數學理解與教學推理，它可能會展現在教學之中，這符合 HCK 的部分特徵（Ball & Bass, 2000）。

## 三、與 SCK 有關的數學教學核心活動：教師選擇、製作、描繪或管理具有數學想法的表徵

### （一）教師為了特殊目的選擇表徵

甲師選擇實體表徵的方式，說明長方體與平行六面體的體積公式都是底面積×高。他向學生收集若干本數學課本，並且將這些課本放在他的右手後堆疊成一長方體後，他將這疊課本輕輕推移成一平行六面體（見下圖 4），讓學生有感覺到長方體在經由連續推移成為平行六面體後，再探討它與原本的長方體體積是相同的。他在課堂上說：

> 你可以看這個長方體，我把這個往這邊推動一下，把這邊稍微推動一下，把它變得有點歪掉，有沒有看到?本來剛剛是正正的，對不對?正正的時候體積是底面積乘高。現在把它變傾斜一點，請問這時候體積有沒有改變?所謂高是上下兩面的距離，是不是沒改變?所以，體積還是一樣嗎?（甲-O-2009/10/19）

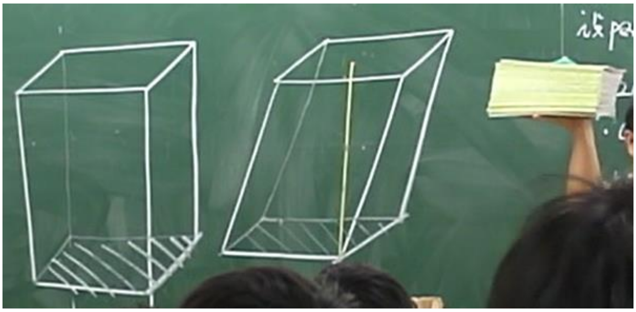


圖 4 平行六面體體積公式的教學（引自：甲-O-2009/10/19）

然而，甲師在訪談時表示：「這個想法是自己想到的，那為什麼想到…因為我一直在想怎麼去呈現它。之前是用硬幣，但是硬幣太小了。」（甲-I-2009/10/29）。也就是說，甲師一直思考教學呈現的方式，並且認為，使用具體或實體所呈現的教學有其實際的限制，以及限制的部分並未詢問學生，他說：「這個實體有一個限制，當時好像沒有問學生。限制就是書本本身就是長方體的，那跟真正的平行六面體是有區別的。我想教學能夠這樣呈現應該就可以了。（甲-I-2009/10/29）」也就是說，個案教師隱藏限制的部分是考量學生數學本質理解的限度，因此，他避開此部分是希望學生更容易學習。

## （二）教師知道某些特定表徵所牽涉的數學內容

甲師拿出一個實體教具（內含三個四面體的三角柱），說明四面體體積以及錐體的體積的公式（見圖 5）。甲師以「若兩錐體底面積與高都相同並且符合祖氏原理，則此兩錐體體積相同。」說明內含的三個錐體體積相等。所以，甲師知道某些特定的表徵（包含實體、圖像、符號、圖表等）與特定的數學內容有關。

圖 5 錐體體積公式的特製教具（引自：甲-O-2009/10/19）

另外，在算幾不等式的部分，甲師認為此時的課程重點不在於算幾不等式的一般化證明，因為一般化的證明在高三選修數學才會提到，但是，三個變數的算幾不等式是否成立，他覺得仍要說明清楚，他說：「剛好我們學校數學講義（指校用講義）在高一的一個地方有例題，就可證明三個變數的算幾不等式。但是，這時候的課程重點不在算幾不等式一般化的證明（甲-I-2009/12/04）」。所以，甲師在三個變數的算幾不等式的證明推導之前，他將算幾不等式 $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ 轉換為另一個數學形式：$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$ ，接著，將 $x$、$y$ 與 $z$ 三個變數之間的關係不失一般性地限定在 $x+y+z=3$ 的條件下得到 $xyz \leq 1$ ，最後，他提供數值實驗讓學生感受算幾不等式的正確性（見下表 2）。

表 2 算幾不等式的數值實驗（引自：甲-O-2009/10/27）

| $x>0, y>0, y>0, x+y+z=3$ | | | $x \cdot y \cdot z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ | |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1.1 | 0.9 | 1 | 0.99 |
| 1.2 | 0.8 | 1 | 0.96 |
| 0.5 | 1.5 | 1 | 0.75 |
| 0.8 | 0.4 | 1.8 | 0.576 |

接著，甲師選擇該校高一講義中的數學任務：「 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解與相關數學性質」來證明三個變數的算幾不等式。他在課堂上說：「那要怎麼證明呢？方法是在高一時候學校的數學講義上面，這題目是我放進去的。（甲-O-2009/10/27）」也就是說，甲師不但知道，而且也理解 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解與其相關數學性質可以用來證明三個變數的算幾不等式（見下表 3）。

上述兩個核心活動都是屬於教師的 SCK，因為，一方面甲師為了讓學生理解長方體與平行六面體的體積公式都是底面積×高特別選擇一個實體表徵來呈現，另一方面，他知道「錐體體積公式的特製教具」以及「 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解與相關數學性質」分別可以用來說明錐體體積為平行六面體體積的三分之一以及證明三個變數的算幾不等式成立，他也知道上述兩者都與特定的數學內容有關。

表 3 因式分解公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的性質與應用（引自：甲-D-2009/10/27）

| | |
|---|---|
| 因式分解公式 | $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ |
| 上述公式延伸的數學性質 | (1) $\forall a,b,c\in R^+,\ a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$<br>(2) 等號成立的條件是 $a=b=c$ |
| 證明三個變數的算幾不等式 | $\because a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$<br>$\therefore$ 我們令 $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt[3]{y},\ c=\sqrt[3]{z}$ 並且將它們帶入上述不等式的數學性質，可得：$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3+\left(\sqrt[3]{z}\right)^3-3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{z}\geq 0$<br>再推得：$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\geq 0\Rightarrow\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}.$ |

## 四、與 KCT、HCK 有關的數學教學核心活動：教師帶領學生具有數學生產性的討論

教師帶領學生具有數學生產性的討論是指，教師提出的問題要能夠延續教學內容的數學內涵。延續上述平行六面體體積公式的教學，甲師提出以下問題：「如果兩柱體的高度與底面積相同，他們的體積嗎？是否需要其他條件呢？（甲-O-2009/10/19）」接著，他再提出：「兩柱體的高度與底面積以及所有相對應高度的截面面積都相同，兩柱體體積是否會相等？」由於，甲師在某個特定時間點上提出問題讓學生做更深的數學探索，這是教師的教學安排，這就是教師的 KCT；另外，這個問題涉及祖沖之原理（又稱為 Cavalieri 原理），它不屬於課本內容，故這樣的知識探索就屬於教師的 HCK。

## 五、綜合討論

### （一）個案教師的 MKT 內涵

首先，關於 PCK 的部分，個案教師的 KCS 是指他知道學生以前學習過的數學技能、數學知識與解題策略。這與 Hill 等人（2008）指出的一般學生的計算能力與策略類似。在 KCT 的部分，個案教師將課堂數學教學內容的排序，亦相似於 Sleep（2009）提出二類涉及 KCT 的數學教學活動：具體說明內容的細節和建構活動，使學生聚焦在預定要學的數學；準備特定教師行動，使學生聚焦在預定要學的數學。最後是，個案教師能夠指出不同單元的數學概念，在學校數學課程中是被安排在哪個年級學習的，就屬於 KCC。另外，個案教師也知道，在課程綱要的規範下，哪些數學內容與特定數學主題有關，但是卻未包含

在課本之中。由此可見，個案教師的 KCC 是完整的。

另外，關於 SMK，首先，個案教師能夠自行設計數學問題與任務，而且不但能夠進行教學示範，也能夠提供學生練習機會，這些都屬於教師的 CCK。這也可推測個案教師對於教學的數學內容充分掌握。另外，個案教師的 SCK 主要出現在說明數學概念的時候，也包含選擇和發展合適的表徵、由二維類推到三維（例如，直線方程式的截距式類推到平面方程式的截距式）、對概念做組織連結、選擇合適的例子解釋數學概念等教學情況。最後，關於 HCK 的部分，我們發現，HCK 的使用需要教師在教學中提供特定的安排，例如，個案教師在使用由學生收集來的數學課本所構作的特殊表徵來呈現「長方體與平行六面體的體積公式都是底面積×高」的同時，個案教師的教學不僅要學生專注在這個特殊表徵轉變的歷程，而且還要避免學生可能產生誤解的地方，並且個案教師要在某個特定時間點提出與祖冲之原理有關的問題，引領學生具有數學生產性的思考。

## （二）觀看案例教師教學錄影刺激教師教學反思並理解教師知識發生的適應情形

本研究嘗試讓個案教師觀看兩位案例教師的課堂教學錄影，以刺激個案教師的教學反思。本研究發現，個案教師的 MKT 產生適應的現象。首先，在前述平面方程式截距式與一般式間的轉換，個案教師觀看兩位案例教師的教學錄影後發現自己教學上的缺失，這個缺失是個案教師未提及平面方程式的截距式與一般式之間是可以相互轉換；另外，個案教師批判兩位案例教師雖然都有說明平面方程式的截距式與一般式之間是可以相互轉換，但是他們卻都沒有說明可以相互轉換的關鍵條件。可見個案教師的 SCK 並非不完整，而是在教學中呈現出不完整的狀況，但是透過案例教師的影片使得彼此之間的 SCK 產生互動，並且內化後的 SCK 補足個案教師自己不完整的 SCK。此種現象如同 Piaget 所提的同化，當個體以既有知識結構面對問題時，將新遇見的事物納入既有的知識結構之內，也就是個體既有知識的類推運用。這也使得個案教師自己的 SCK 能夠在教學中愈趨於完整，這不但有助於提高教師教學的數學品質，也有助於學生學習數學。

在四面體最小體積問題的部分，由於兩位案例教師都將 $P$ 點改為 $(x_0, y_0, z_0)$ 的一般形式，他們不但推導與說明四面體最小體積是 $\frac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0)$，而且亦討論 $P$ 點為三角形的重心。由之前的討論得知，個案教師雖然沒有探討四面體最小體積一般化情況的教學經驗，也不知道在四面體最小體積的情況下點 $P$ 就是三角形 $\Delta ABC$ 的重心（見表 1），但是，他透過觀看兩位案例教師的教學錄影後確實看到了此問題背後數學規律的現象，甚至

可以與三角形最小面積問題產生連結，並且推論出在三角形最小面積的情況下點 $Q$ 就是線段 $\overleftrightarrow{AB}$ 的中點（見表 1）。因此，個案教師理解此問題背後的數學的連結與意義，而且在訪談中也表示以後遇到此問題的教學會嘗試引導學生朝向此面向來探討。此種情形如同 Piaget 所提的調適，當個體既有知識結構無法同化新知識時，個體為了服膺環境需求主動修改既有的知識結構，從而達到目的的一種心理歷程。也就是說，四面體最小體積問題不但觸發個案教師一種更深、更廣的數學理解，這也是一個教師的 SCK 發生質變並且調適為 HCK 的實例。可見，個案教師透過觀看案例教師的教學活化了自己的數學思考，一方面觸發個案教師更深、更廣的數學理解，這影響教師嘗試透過教學鋪陳引領學生更深一層的數學學習；另一方面個案教師的數學知識不但提升，也深化自己本身的教學知識，嘗試考量更深的數學知識可納入下一次的教學安排，同時觸發個案教師未來教學可能的行動。

綜合上述，個案教師透過觀看兩位案例教師課堂教學錄影確實使個案教師的教學反思脫離描述層面，因為相同的教學單元，許多教學實務脈絡中產生的實務問題容易刺激教師原有的知識結構，也因為相同的教學單元不同的教學鋪陳更能夠探討此單元中知識間網絡應該如何連接，以幫助學生學習。因此，這樣的反思才能夠更有機會將教師的反思與行動相互結合，達到反思即行動的目標（Bleakley, 1999）。

# 伍、結論與建議

本研究歷經 10 個月的時間，藉由高中教學討論會的方式集體觀看、比較、分析高中資深數學教師的課堂教學，透過訪談與文件等資料的比較與分析，歸納出個案教師的數學教學核心活動中使用的數學知識，亦即是，個案教師的教學用數學知識。另外，透過觀看兩位案例教師的教學錄影，觸發個案教師的教學反思，使個案教師原有的教學用數學知識朝向提升數學品質的實務面向。

雖然本研究對於個案教師的教學用數學知識有比較深入的描述，但是仍然有許多美中不足的地方，我們可以從下述兩個觀點來了解。第一，理解實務本身的方法會自然地伴隨著數學教學核心活動的數學分析，可以反映出教師的數學知識如何影響教學實務（Ball & Bass, 2000; Ball et al., 2001）。儘管本研究仔細地挑選一些教學事件，但是仍然有許多遺珠之憾；限於論文篇幅，研究者無法細心詮釋與報導所有教學事件。第二，數學教師知識的學術研究大部分都聚焦在特定的數學教學單元裡（Chinnappan & Lawson, 2005），在本研究中，不同教師在相同教學單元裡，研究者可以建立更深層的質性比較，畢竟，它們的數學本質相近，可以引起教師較強的共鳴，也用來比較不同教師的數學教學專業

知識。接著，研究者提出兩方面的建議，供未來研究參考。首先，關於如何精進研究設計方面，由於本研究是採取一個個案，針對高中二年級相同教學單元做分析。研究者建議可以採多個個案進行相同單元的教學比較，而且在臺灣的教育環境下，教師在高三複習的教學也許更能觀察到教師對於數學概念的整體理解，了解教師知識內涵多樣的面貌。此外，在文化差異的影響下，美國中學數學教師的數學教學相關知識是否會與臺灣數學教師相似呢？所以，調查國內中學數學教師 MKT 的特色，就是個可以深入研究的方向。另外，如果能將研究對象擴展到不同時期的教師，包含實習教師、初任教師與資深教師，探討他們的 MKT 特質與差異，可以幫助中學數學師資培育者思考，未來中學數學教師培育，應該教導與發展實習教師與初任教師什麼樣的教學專業知識？並且，發展 MKT 測驗題目確認中學數學教師哪些教學專業知識有不足的情形。對於在職中學數學教師，也能夠幫助他們清楚掌握自己教學中用到的各類教學專業知識，以促進教師教學反思，進而引動他們教學的專業發展。

## 致謝

本文感謝國科會提供經費協助（計畫編號：NSC 98-2511-S-003-045-M）以及參與研究的教師無私地提供他們的想法與觀點。

## 參考文獻

江豐光（2005）。**國小資深教師數學課堂教學事物之個案研究**（未出版之碩士論文）。國立中山大學教育研究所，高雄。

沈湘媛（2012）。**高中數學教師教學專業知識的個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

周淑卿（2006）。反思實踐者應有的學習經驗－兼論教學實習課程的問題。載於中華民國師範教育學會主編，**新世紀師資培育的圖像**（頁 175-191）。臺北：心理。

林培棠（2012）。**兩位資深高中數學教師專門內容知識之嵌入式設計的混合方法研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

教育部（2012）。**中華民國師資培育白皮書**。臺北：教育部。

許秀聰（2005）。**一位資深高中數學教師重構教學概念的行動研究**（未出版之

碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

莊上霖（2005）。**數學成長團體下一位資深在職教師數學教學知能成長之研究**（未出版之碩士論文）。國立新竹教育大學人資處數學教育碩士班，新竹。

陳芳如（2008）。**一位資深高中數學教師實習輔導模式的個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

陳亭瑋（2011）。**資深高中數學教師教學知識與教學構思的個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

陳霓慧（2006）。**八位學生數學教師教學認知和情意面互動的個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

曾名秀（2011）。**資深高中數學教師教學相關知識的個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學數學研究所，臺北。

饒見維（1996）。**教師專業發展--理論與實務**。臺北：五南。

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). London: Ablex Publishing.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Charalambous, C. Y., Thames, M., & Lewis, J. M. (2009). Teacher knowledge and teaching: Viewing a complex relationship from three perspectives. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (PME 33), Vol. 1 (pp. 121-125). Greece: Thessaloniki.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (pp. 433-456). Washington D.C.: AERA.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Berliner, D. C. (1986). In pursuit of the expert pedagogue. *Educational Researcher, 15*, 5-13.

Berliner, D. C. (1988). *The development of expertise in pedagogy.* Washington D.C.: AACTE.

Bleakley, A. (1999). From reflective practice to holistic reflexivity. *Studies in Higher Education, 24*(3), 315-330.

Borko, H., & Livingston, C. (1989). Cognition and improvisation: Differences in mathematics instruction by expert and novice teachers. *American Educational Research Journal, 26*, 473-498

Brown, C., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.

Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston, M. Haberman, & J. Sikula (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 291-310). New York, NY: Macmillan.

Calderhead, J., & Gates, P. (1993). Introduce. In J. Calderhead & P. Gates (Eds.), *Conceptual reflection in teacher development* (pp. 1-10). London: The Flamer Press.

Charalambous, Y. C. (2008). *Preservice teachers' mathematical knowledge for teaching and their performance in selected teaching practices: Exploring a complex relationship* (Unpublished doctoral dissertation). State University of Michigan, East Lansing, MI.

Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 197-221.

Cooney, T. J. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. In D. B. Aichele & A. F. Coxford (Eds.), *Profession development: 1994 yearbook* (pp. 9-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Lexington, MA: D. C. Health.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan.

Hager, P. (1996). Professional practice in education: Research and issues. *Australian Journal of Education, 40*(3), 235-247.

Hill, H. C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 513-545.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of student. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*, 430-511.

McDiarmid, G. W., & Clevenger-Bright, M. (2008). Rethinking teacher capacity. *Handbook of research on teacher education* (3 ed.) (pp. 134-156). Washington D.C.: AERA.

Lampert, M., & Ball, D. (1999). Aligning teacher education with contemporary K–12 reform visions. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 33-53). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Leinhardt, G. (1983). Novice and expert knowledge of individual students' achievement. *Educational Psychologist*, *18*(3), 165-179.

Leinhardt, G., & Simth, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, *77*(3), 247-371.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Sellick, D. (1996). Learning to use the mirror: Reflection and teacher education. *Education Today, 46*(4), 11-16.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sleep, L. (2009). *Teaching to the mathematical point: Knowing and using mathematics in teaching* (Unpublished doctoral dissertation). State University of Michigan, East Lansing, MI.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. London: Sage.

# A Case Study on Content and Adaptation of Experienced High-School Mathematics Teacher’s Mathematical Knowledge for Teaching Through Pedagogical Reflection

**Yi-An Cho *　Chien Chin **　Hsien-Yi Chiu *****

The purpose of this study was to explore, through pedagogical reflection, the content and adaptation of an experienced high-school mathematics teacher’s mathematical knowledge for teaching. Firstly, via observation and discussion, the experienced high-school mathematics teacher’s “core activities” of mathematics teaching were identified, and some interview questions were compiled in terms of the mathematical analysis of these core activities. Secondly, the reflections regarding the demonstrations of two teachers were provided. Findings of this study indicated that knowledge of content and students involved the teacher’s knowing and understanding of his students’ learned mathematical skill, mathematical knowledge and strategies for solving mathematical problems; knowledge of content and teaching involved the teacher’s ability of sequencing the teaching topics; knowledge of content and curriculum involved the teacher’s familiarity with the concepts that had been and would be taught in the same subject area during the preceding and subsequent years in school; common content knowledge involved the design of mathematical exercises and tasks; specialized content knowledge (SCK) meant that the teacher would be able to choose an appropriate example and representation to explain the mathematical concepts; horizon content knowledge (HCK) implied that the teacher would be able to know the mathematical contents that students needed but were not included in textbooks. Furthermore, the case teacher’s SCK was adapted to that of the two teachers. Specifically, some was assimilated to the two teachers’ SCK, and some was accommodated to HCK. This kind of pedagogical reflection made the teacher’s SCK the basis of the pedagogical action.

Keywords: pedagogical reflection, core activities of mathematics teaching, mathematical knowledge for teaching

* Yi-An Cho, Doctoral student, Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University,

** Chien Chin, Professor, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

*** Hsien-Yi Chiu, Mathematics teacher, Taipei Municipal Jianguo High School

Corresponding Author: Yi-An Cho, e-mail: scottie@hcvs.hc.edu.tw