課程與教學季刊　2015, 18(4),頁 161～192

線段圖教學對五年級學生代數文字題學習表現之影響

林施君*　徐偉民**　郭文金***

本研究以線段圖為教學策略，探討對五年級學生代數文字題學習成效的影響。以高雄市兩班五年級的學生各 30 位為對象，採準實驗研究法，實驗組接受研究者設計的線段圖教學，控制組接受一般策略教學，進行二週共 8 節課的教學後，透過自編之前測、後測以及延後測，來檢驗線段圖教學對學生代數文字題學習的影響。結果發現，實驗組學生在後測與延後測的表現上，明顯高於控制組學生，顯示線段圖對國小五年級學生代數文字題具有良好的學習與保留成效；其中，又以中數學成就學生的學習與保留成效最為顯著。

關鍵詞：代數文字題、線段圖教學、學習表現

*　作者現職：高雄市獅湖國小教師

**　作者現職：國立屏東大學科普傳播學系副教授兼系主任

***　作者現職：國立內埔高級農工職業學校數學教師

通訊作者：郭文金，e-mail: wenjinkuo@gmail.com

壹、緒論

在中小學數學課程中，培養學生解決問題的能力，是數學教育的一項重要目標：1980 年美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）提出「問題解決教學」是學校數學教學的重心。在 2003 年公佈「國民中小學九年一貫課程綱要」中，也把「獨立思考與解決問題」列入十大基本能力之中，且在九年一貫數學學習領域的教學總體目標也明確指出「學習應用問題的解題方法」（教育部，2003）。由此可知，「問題解決」在數學教育中占了相當重要的地位，因此，如何培養學生的解題能力就顯現其重要性。

代數在數學領域裡是內容特別豐富的一個分支，因為學生透過學習代數可以增強他的解題技能（詹勳國、李震甌、莊蕙元譯 2004）。對代數教學而言，代數概念的學習是學生在數學學習上的一個關鍵點，也是學生日後學習更高深數學之基礎（Linchevski, 1994; Tall, de Lima, & Healy, 2014）。也因為學習的內容由具體到抽象，由算術到代數，多數學生在接觸到正式代數內容之前，缺乏代數主題的前置經驗，因此，在跨越這個學習的重要階段時，會面臨到很大的挑戰。所以，採用適合的教學策略，幫助學生順利進入抽象的代數世界，減少學生在代數上的學習困難是值得重視的，也是本研究欲探討的焦點。

自小學中年級開始，文字題在課程中所佔比重逐漸增加，比起計算題，文字題需要更複雜的認知過程，且需要結合語言理解能力、表徵能力和計算能力。許多學生因學習數學的挫敗，造成數學成績低落，而其中最讓其頭痛的就是文字題了（羅綸新、劉宛枚，2012）。學生在文字題最大學習困難在於問題表徵階段，而不在解題階段，因為學生缺乏將文字題的陳述意義和概念，轉換為有效的表徵，而導致解題失敗（謝哲仁、謝佩君，2013；Davis-Dorsey, Ross, & Morrison, 1991; Lewis & Mayer, 1987）。所以，使用視覺表徵是文字題解題表現的關鍵因素之一，成功的解題包含問題表徵和解題過程，而使用圖示表徵問題中的情境，可降低學習者的工作記憶的資源（Jitendra et al., 2013; Jitendra & Star, 2011）。可見表徵能力在數學解題的重要性。因此，教師若能進行有效的表徵策略的教學，將可以提升學生的解題能力（Fuson & Willis, 1989; Lewis, 1989）。Fuson 與 Willis（1989）指出圖解可以作為學生對於問題的具體瞭解和抽象代數之間的一座橋樑，而這種轉換的過程則被視為學生學習數學的基本能力之一，且使用線段圖來表現文字描述的情境，常能使問題中的數量關係具體化（陳竹村，2002）。所以在許多的解題圖像表徵型式中，線段圖在相關的研究中普遍受到研究者的喜好（吳昭容，1990；陳竹村，2002；蔣治邦，2001；Van Garderen, 2006, 2007）。

不同數學能力的學生與其數學解題的表現關係也是值得探討的課題之一。涂金堂（2007）指出探討不同數學能力的學生，是否因具備不同的問題基模，而影響其數學解題表現是研究數學文字題結構的方向之一。Silver（1977）以 95 位國中二年級的學生為研究對象，讓受試者對 24 題數學文字題進行卡片分類的工作，研究結果顯示：學生對文字題的深層結構的知覺與其數學解題能力呈現正相關。Marshall（1995）以 42 位國小六年級學生為研究對象，讓受試者進行 20 題數學文字題相似性的卡片分類，研究結果顯示：高數學能力組的學生是根據基模知識來進行相似性的分類，而低數學能力的學生則是根據題目的表面問題情境來進行相似性的分類。

基於相關的文獻（魏君芝，2003；Van Garderen, 2006, 2007），研究者發現線段圖策略對學生文字題的解題有顯著成效，但較少進行代數文字題教學的探究。然而，代數是較抽象的概念，需要具體化的引導，且五年級學生又是正要進入抽象代數課程學習的階段，學習過程倍感困難且成效不彰，使用線段圖來呈現文字的情境，將可以更加具體化問題情境中的數量關係。因此，本研究目的有二：（一）探討線段圖的教學策略對國小五年級學生在代數文字題的學習成效、（二）探討接受線段圖教學策略的國小五年級學生在代數文字題學習的保留情形。藉此來了解線段圖教學策略對學生代數文字題解題之影響，以作為後續教學和研究的參考。

貳、文獻探討

一、數學解題理論

解題是指從一個給定要克服困難的狀態，和看不到達到目標的方法，到解決困難並完成目標的過程（Mayer & Wittrock, 2006）。Polya（1945）在“How to solve it”一書中，有系統的把解題的歷程分成了解題意、擬定計劃、執行計劃及回顧解答等四個步驟；Schoenfeld（1985）以後設認知的控制因素觀點，將 Polya 的解題歷程分為閱讀、分析、探索、計畫、執行和驗證等六個階段；Lester（1985）也將 Polya（1945）的解題歷程模式修訂為：問題的覺知、問題的理解、目標分析、計劃的發展、計劃的執行、程序和答案評估等六個階段來描述解題歷程；而 Mayer（1992）則是從認知心理學的觀點，把解題歷程區分成「問題表徵」和「問題解決」兩個階段。問題表徵階段是指將文字或圖案轉換成心理表徵，在此階段又可以分成「問題轉譯」及「問題整合」兩步驟；而問題解決階段是指將問題從心理表徵進行到最後答案的過程，此階段又分成「解題計劃及監控」、「解題執行」兩步驟。Mayer（1992）認為解題蘊含以下五種不同的知

識：

（一）語言知識：學生認識並能讀出題目中字詞的能力，了解問題的條件及解題目標。

（二）語意知識：與現實事物相關的知識，如 1 公尺等於 100 公分等。

（三）基模知識：依據問題的結構分類，例如加、減、乘、除的分類。能以具體事物、圖畫或符號表徵問題的能力，如用未知數符號來記錄問題。

（四）策略性知識：應用已有的知識來計劃和檢視問題解答的技能，及如何執行的程序，例如訂定子目標等。

（五）程序性知識：如何表現一系列運算的知識，使一步步趨近問題的答案。

Montague（2003）進一步將問題解題過程的步驟概念化，其將問題轉譯解釋為學生的閱讀理解以及使用自己的文字解釋問題，問題統整則是藉由製造表徵來將問題視覺化。在 Mayer 的解題四個階段中，許多學生在第一階段的轉換階段即發生了困難，也就是從文字表徵轉換到數學表徵的階段（Sajadi, Amiripour, & Malkhalifeh, 2013），而 Mayer 的模式也說明了數學解題對多數學生而言是困難的，也就是說解題過程中的每一個複雜的步驟要能完成正確解題，必須仰賴每一個子步驟的正確性（Jitendra, Griffin, Deatline-Buchman, & Sczesniak, 2007）。

Usiskin（1988）指出代數是通則化的算術，也是一門有關數量關係的科目以及研究數學結構的科目，Van Amerom（2003）從實用性的觀點指出代數是廣泛的算術、解決問題的工具、探討文字與數字之間的關係的一門科目，代數同時也是通往高等數學必須具備的重要能力之一（Adelman, 2006; Star et al., 2015），雖然代數在學校數學課程具有重要的地位，但很多學生發現代數是抽象的且難以理解（Witzel, Mercer, & Miller, 2003），換言之，代數抽象的本質，使得它比算術增加了困難度（Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2006）。

算術的解題活動是經由一系列的運作以獲得答案為目標，而代數解題則是表徵數量之間的關係（Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006）。學生在代數學習上的困難，是來自於算術與代數之間本質上的差異，也就是有些符號在代數與算術間的意義不同，導致學生認知上的困難（Van Amerom, 2003），Kieran（2003）也認為，從算術轉換到代數的框架，也是學生學習困難的地方。因此，從固定的數量和已知數轉換到探討變量和未知數，對學生來說是一件困

難的事（Common Core State Standards Initiative, 2010）

綜上所述，Lester（1985）與 Schoenfeld（1985）的解題歷程，都是以 Polya（1945）的歷程為基礎，再做增減或修改。而 Mayer（1992）的解題歷程則是強調表徵，重視解題者如何將問題陳述句正確轉譯並適當整合成連貫一致的數學表徵，與其他學者相比較，Mayer 的解題理論從認知的角度探討解題歷程，清楚提出各階段內所含的知識類型。因此，解題的過程包含重要認知技能的活動，從認知的觀點而言，解題的過程包括表徵、計畫、執行和評估（Akcaoglu, & Matthew, 2014; Jonassen, 2000）等四個步驟。Montague（2006）認為問題表徵和問題執行都是解題成功的必要條件。一位成功的解題者需要有問題合理的首要表徵來引導解題計畫。此外，代數的解題在於探討問題中的數量關係，Krawec（2014）指出在數學教育研究中有一個小而重要的主體，就是探討學生區別問題中相關訊息和不相關訊息的能力，特別是數量關係，而成功的解題者可以將問題情境中明確的或是隱含的數量之間的關係建構出一個模式，並以此模式做為解題計畫的基底（Arevalillo-Herráez et al., 2014）。

因此，本研究主要參考 Mayer（1992）的解題理論加上檢核答案的部分，並配合小學生能理解之語彙，形成瞭解問題、畫線段圖、依圖列式、解未知數和檢核答案等五步驟做為線段圖教學，其中瞭解問題是能依據題意找出已知條件和解題目標，此步驟對應於 Mayer 解題策略中的問題轉譯；畫線段圖是依題意把已知數與未知數的關係畫成線段圖，對應於 Mayer 的問題整合；依圖列式是依照畫出的線段圖列出正確的算式，對應於 Mayer 的解題計畫及監控；解未知數是依照列出的算式解出未知數，對應於 Mayer 的解題執行，最後再檢核答案。所以本研究採用的線段圖教學策略能和 Mayer 的解題策略相互呼應，能作為代數文字題的合適性教學策略。

二、表徵理論

表徵是認知活動中的產物，學習者可以經由表徵形式瞭解知識的結構與內涵。蔣治邦（1999）認為表徵是用一種形式，把所要表達的概念表現出來，達成溝通的目的；NCTM（1989）說明表徵應當作為：（一）學習者所知道的數學觀點及關係、（二）溝通他人與自己之間的數學想法和觀念、（三）連結相同的數學概念、（四）將數學運用到真實情境的關鍵。就數學學習而言，表徵可以區分為外在表徵和內在表徵，內在表徵是指學習者頭腦中所建立的某種形式的表徵，是不可見的，而外在表徵是指解題者把頭腦裡面的內在表徵，用某種外在的形式表達出來，以使他人能夠了解自己的內在運思，也可進一步成為運思的材料，以簡化解題過程。數學概念的外在表徵包含數學符號、圖示、圖

表、數表和模型等（陳霈頡、楊德清，2005），本研究的表徵主要指外在表徵，特別指的是圖示表徵。

從 Mayer（1992）的解題理論可知，學生若能有效的表徵問題，將問題成功轉譯，則解題成功的機會將大幅的提升。因此，在解題過程中多元表徵提供了不同的效果（Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007）。長久以來，數學教育家已經認知到圖示在數學解題的重要性（Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009），特別是圖示表徵可顯示問題中的結構與訊息，促進數學解題（Diezmann, 2005; Novick & Hurley, 2001），因為圖示表徵可把原來複雜的文字，用簡單的方式呈現，讓抽象的關係具體化，因而降低了認知記憶的負荷，促進解題的成功，所以圖示可提升數學的解題效率（Diezmann & English, 2001; Uesaka, Manalo, & Ichikawa, 2007; Zahner & Corter, 2010），且國內研究（林香、張英傑，2004；蔡宜芳、楊德清，2007）也發現圖示表徵在數學解題上，有很多正面的價值，正確且適當的圖示表徵是解題成功與否的關鍵所在。

所以，本研究以圖示表徵中的線段圖來表現代數文字題情境，讓問題情境中的數量關係更加具體化，以探討線段圖對國小學生在代數解題學習上的成效。

三、代數文字題的探討

由九年一貫數學領域代數領域分年細目可發現，代數的概念在國小一年級循序漸進的帶入，讓學生從覺察生活情境中數量的加減乘除關係開始建立，接著運用於驗算與解題中，至使用未知數符號表徵問題情境，最後能解決未知數列式的問題（教育部，2003）。這種把同一主題教材安排在各年級的數學課程中，與世界的數學課程改革的趨勢相符合（Stein, Remillard, & Smith, 2007），也反映出學生可以提早進行代數概念學習的事實。其中，從四、五年級開始，逐漸引進並使用文字符號來說明算術運算中的數學概念，這是由算術進入正式代數重要的轉換期，此階段的學習是日後代數學習的重要關鍵，而此階段的學生，其認知發展正由具體情境轉換到抽象思考的過渡時期，代數學習便是此過程中重要的連結。因此，各版本的教科書從五年級起，開始編入以文字符號表徵情境中的未知量、列出等式、並求出文字符號的值和驗算等內容，以協助學生能逐漸進入抽象代數概念的學習與應用，這是本研究之所以針對五年級學生為對象的主要原因。

文字題被認為是算術的或是代數的，主要是在於轉換的過程的呈現方式，假如此過程只是用數字資料來呈現而已，就是算術文字題，反之，如果此過程是用未知數或是方程式來呈現，就是代數文字題（Carraher et al., 2006; Puig & Cerdan, 1990）。代數文字題與算術文字題語意結構上其實沒有太大不同，但在

解題過程中符號運算程序及表示方法上就有很大的區別。舉個例子來說，在解「某數的 3 倍減 2 是 46，某數是多少？」時，在算術上，學生常用某種程序性的思維來解題，解法為：減 2 後得到 46，所以加 2，得到 48，但 48 是某數得 3 倍，所以某數為 48 除以 3，因此某數為 16。此時要做的運算有「加 2」以及「除以 3」。小學階段的學生不會想到等量關係，其在面對問題時或求解的時候，經常會藉由反推來求出答案，通常只會使用一連串非正式的逆運算。而在代數上，須進行與原思維逆向的思維才能將原問題情境數學化， 代數解法為：設某數為 x，依題意列式為 3x－2＝46，這個方程式所做的運算是「乘以 3」及「減 2」，恰好與算術上的運算相反，這種逆向思維方式，讓初進入代數學習的學生在思考方式上須要做相當大的調整，造成學習上的困擾。

然而，代數文字題不同於一般列式的計算題，解題者必須閱讀並理解題意，透過語文理解，再依題意列出算式，然後由「策略知識」和「程序知識」的運算求得解答，而多數學生對此類問題感到困難的主因是剛開始時不知如何將語文轉譯成算式（羅綸新、劉宛枚，2012；Lewis & Mayer, 1987）。在數學學習的相關研究上，代數文字題的解題歷程成為當代數學教育探討的重要主題之一（Lewis, 1989），在 1970 年代解題的研究方向大部分是以一般問題或數學解題理論的產生為主，近年來的研究則著重在「問題表徵」和「問題解決」（Maccini & Hughes, 2000），其中在問題表徵方面主要探討數學解題歷程中解題者的語文知識對代數文字題情境轉譯的影響。而學生要能夠成功地解題，就必須在問題與解題策略過程之間，建立完整而正確的問題表徵。而 Jitendra 等人（2007）的研究也認為視覺表徵可以顯示數量之間的關係，較好理解問題，可有效解決文字題並提升數學成就。

由此可知，代數文字題解題成功與否，取決於個體內在表徵與外在表徵之間的轉譯是否順利？所以引導個體從不同的角度思考問題，將有助於數學問題的解決（陳霈頡、楊德清，2005；謝哲仁、謝佩君，2013）。因此本研究採用 Mayer（1992）的解題理論和線段圖來進行教學研究。

四、線段圖的相關研究

代數文字題的解題除了涉及計算能力之外，還涉及語文理解、問題轉譯與解決問題的運作，是相當複雜的心理認知歷程。從 Mayer（1992）的解題理論可知，學生若能有效的表徵問題並成功轉譯，將可提升解題的成功機會。而如線段圖、座標圖等外在表徵，可將抽象的概念或內在表徵以視覺的方式呈現出來，以協助思考。Diezmann 與 English（2001）的研究結果顯示，圖示可把原來複雜的文字，用簡單的方式呈現，提升解題的效率。Jitendra、Dupuis、Star

與 Rodriguez（2014）探討 Schema-Based Instruction（SBI）的策略對文字題解題成效的影響，其認為使用適當的圖示表徵問題，可使問題中各數量之間的數學關係更加明確，而圖示表徵也是解題成功的關鍵因素之一。因此，在代數文字題中，當數與數的關係較抽象時，適當的圖示表徵應有助於問題的解決。

線段圖（line-diagram）是圖示表徵之一，以線段長短代表數量的大小，並藉弧線表示數量的起點與終點。若有未知數，則以問號「？」或「□」表示待求的未知數（吳昭容，1990）。使用線段圖能使代數文字題中蘊含的抽象的數量關係以直觀的方式表達出來，有助於學生思考，促進問題的解決。線段圖容易彰顯問題中數量間的「部分－全體」關係，透過線段圖的媒介，注意到問題中的「部分－全體」關係，進而發展運用「部分－全體」關係分析來理解問題情境的能力，提升數學概念的層次（蔣治邦，2001）。

線段圖在相關的研究中也受到研究者的喜好，如吳昭容（1990）使用多步驟文字題探討 150 位五年級的學生運用線段圖解題的表現情形，研究發現經過 80 分鐘的線段圖教學後，學生對所提供的線段圖具有理解能力，也提高了解題正確率，對於某些未講解的題目也能產生正向的遷移。蔣治邦（2001）探討 448 位三、四年級的學生在合併、改變、等化與比較等四類問題情境中使用線段圖，研究發現學生在線段圖與標準算式一致的表現較佳且四年級學童對圖形的解讀能力優於三年級。胡惠芬與李源順（2005）探討分數的整數倍教案設計對國小五年級學生的教學成效，此教案的設計是在教學中以面積切割或線段圖來表徵分數的整數倍概念知識，研究對象為 29 位五年級的學生，結果顯示使用圖示表徵的教學確實可以協助學童對概念的理解。陳建州與劉祥通（2007）探討一位剛升上國一的學生，在學生尚未學習文字符號的代數運算前，對於比例問題的解題表現，研究發現能使用適當的圖形表徵題意是個案解題成功的關鍵因素之一，而以畫線段圖的方式處理，不僅有助於理解問題，更能具體呈現彼此之間的比例關係。

然而，儘管上述研究結果都呈現線段圖對解題有正向效果，但也有研究者（蔣治邦，1999；Cobb, Yackel, & Wood, 1992）指出線段圖提供的視覺線索，並非都是顯而易見的。林香、張英傑（2004）的研究也指出學生透過線段圖表徵協助解題思考，首要之務是圖形要正確且適當，才能發揮功效，反之，則無助於觀察推理。因此，雖然使用線段圖可使文字題中的數量關係具體化（陳竹村，2002），但學生對他人描繪的線段圖是否能夠賦予正確的意義，在於教師能否提供正確且適當的線段圖，並透過線段圖的教學策略引導學生理解線段圖，最後能夠自行依據題意畫出正確的線段圖來呈現題目中的數量關係，以協助學生成功解題。

因此，本研究引入線段圖教學的目的是希望學生能透過線段圖來提升列式能力，以理解式子所表達的情境與概念，並對照線段圖來解出未知數，而不只是背誦一些解題的規則。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採準實驗設計（如表 1）探討線段圖教學策略對國小五年級學生代數文字題學習成效的影響。實驗處理前兩組都接受前測（O1、O2），之後，實驗組（X1）實施參考 Mayer（1992）的解題歷程所發展的五步驟線段圖教學策略：瞭解問題、畫線段圖、依圖列式、解未知數、檢核答案，控制組（X2）則依照課本進行一般的代數教學。兩組皆進行每週四節課，共兩週的教學。於教學實驗後一週內，兩組同時進行後測（O3、O4），以比較兩組在代數文字題解題表現是否有差異，並於教學後一個月進行延後測（O5、O6）以了解學習保留效果。

本研究自變項為教學法，實驗組接受線段圖教學法，控制組接受一般講述式教學法。控制變項有三：（一）兩組使用的教材內容都一樣、（二）教學時間都相同、（三）兩組的教學進度都相同。

二、研究對象

本研究以立意取樣，選取高雄市某國小五年級兩班學生，研究者所任教班級為實驗組，另一班為控制組，由另一位老師進行教學，兩組都各有 30 位學生。為了解兩組學生是否具有同質性，研究者將兩組學生在五年級上學期數學科學期成績進行獨立樣本 t 檢定，實驗組學生的平均分數為 81.95（標準差為 17.28），控制組學生的平均分數為 82.33（標準差為 15.21），t 值為.09（$p=.93>.05$），未達顯著差異，顯示兩組在實驗教學前數學表現無顯著差異，具有同質性。

三、研究工具

由研究者自行編製前測、後測、延後測等研究工具，其中後測與延後測試題結構相同，只在數字或情境做更改。本研究希望了解兩組學生是否具備學習代數解題的相關先備知識，及在康軒版第十冊「怎樣解題」單元教學前的起始能力是否同質。因此，依據九年一貫課程綱要中一至五年級上學期關於代數主題之分年細目、參考課本、習作設計前測試卷，前測編製的雙向細目表如表 1。

在表 1 中將能力指標中提及「能說」、「能聽」、「能寫」、「能讀」、「能認識」、「能理解」、「能知道」、「能報讀」、「能整理」等文字的等歸納為「概念理解」；能力指標中提及「能計算」、「能換算」、「能算出」等文字的歸納為「計算流暢」；能力指標中提及「能解決」、「能比較」、「能實測」、「能使用」、「能分裝」、「能操作」、「能運用」、「能切割」、「能重組」、「能製作」、「能繪製」等文字的歸納為「應用解題」。

表 1 前測試題編製的雙向細目表

分年細目	認知層次			題數	小計(%)
	概念理解	計算流暢	應用解題		
1-a-01	選擇 1			1	
1-a-02	選擇 2			1	10.71
1-a-03	選擇 3			1	
2-a-01	選擇 4			1	
2-a-02			選擇 5 應用 1-1 應用 2-1	3	25.00
2-a-03	選擇 6			1	
2-a-04		應用 1-2 應用 2-2		2	
3-a-01		選擇 7	應用 3-1 應用 4-1	3	14.29
3-a-02	選擇 8			1	
4-a-01	選擇 9 選擇 10 選擇 11			3	
4-a-02			應用 5-1 應用 6-1	2	
4-a-03		應用 3-2 應用 4-2 應用 5-2 應用 6-2		4	35.71
4-a-04	應用 7			1	
5-a-01	選擇 12		選擇 13 應用 9	3	14.29
5-a-02		應用 8		1	
小計(%)	39.29	28.57	32.14	100.00	

本研究後測的目的在比較兩組學生教學後的學習表現，而延後測的目的是在比較兩組學生的學習保留效果。後測（延後測）編製依據九年一貫課程綱要中五年級下學期關於代數主題之分年細目，參考課本、習作、教師手冊設計後測試卷，後測編製的雙向細目表如表 2。表 2 之編製根據教學單元目標及教學活動內容題型分類為主，包括基礎題的加法列式（被加數未知、加數未知）、減法列式（減數未知）、乘法列式（被乘數未知、乘數未知）、除法列式（被除數未知、除數未知），延伸題的加減混和、加（減）乘混和、加（減）除混和。

為了解試題的適切性，所有試題皆實施預試，並計算各題的難度和鑑別度，吳明隆（2013）指出較佳的測驗難度應介於 0.2 與 0.8 之間，鑑別度需大於 0.3。前測第一次預試以 29 位五年級學生為樣本，預試結果：選擇 1 的難度為.88(>.8)，鑑別度為.25(<.3)，雖然均未達標準，但因符合所要測試之能力指標，因此予以保留。選擇 2、選擇 3、選擇 6、應用 8 之難度或鑑別度未達標準，將這些題目以更改選項型態、更改問題情境和更改未知數位置等方式進行修正，修正完成後進行第二次預試，第二次預試以 120 位五年級的學生為樣本，分析結果：各題難度及鑑別度皆已合乎要求，整體難度為.74，整體鑑別度為.43，於是前測試題確定。後測第一次預試以 30 位五年級學生為樣本，分析結果：應用題 5 難度.84(>.8)、應用題 8 難度.92(>.8)及計算題 6、12 的難度或鑑別度未達標準，將這些題目以更改問題敘述、更改未知數位置和已知數字位置對調等方式進行修正，而計算題 2、3 因太簡單及無鑑別度，因此予以刪除。第二次預試以 120 位五年級的學生為樣本，分析結果：各題難度及鑑別度皆已合乎要求，且整體難度為.63，整體鑑別度為.51，於是後測試題確定。

在信度方面，分析第二次 120 位學生的預試結果顯示前測的信度 α 係數為.87，後測的信度 α 係數為.88，顯示前測、後測（延後測）試卷具有不錯的內部一致性信度。在效度方面，前測是依據九年一貫課程綱要中一至五年級上學期關於代數主題之分年細目表設計題目，後測則是依據九年一貫課程綱要中五年級下學期關於代數主題之分年細目表設計題目，此外也在預試後晤談低、中、高分組各兩名學生，以了解受試者是否清楚題目的語句和作答情形，同時也與數學教育的學者專家討論修正，所以具備了內容效度與專家效度。

正式施測的前測有 13 題選擇題、9 題應用題，其中概念理解有 11 題，計算流暢有 7 題，應用解題有 7 題，而有 6 題應用題同時具有計算流暢和應用解題，滿分為 36 分。後測有 9 題填充題、12 題應用題和 11 題計算題，其中能用 x、y 等文字符號表徵生活中的變量有 9 題，能用文字符號表徵生活情境問題中的未知量並列成等式有 12 題，能求出等式中文字符號的值並做驗算有 23 題，

而有 12 題同時具有能用文字符號表徵生活情境問題中的未知量並列成等式以及能求出等式中文字符號的值並做驗算，滿分為 55 分。為探討接受不同教學的受試者的解題策略，後測題目的題型包含單步驟基礎題和多步驟延伸題。前測、後測測題目的計分方式如表 3。

表 2 後測試題編製的雙向細目表

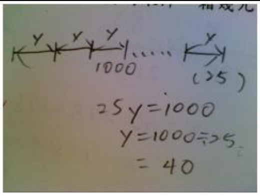
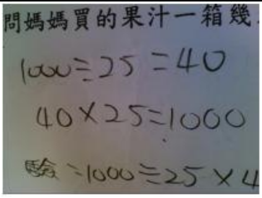
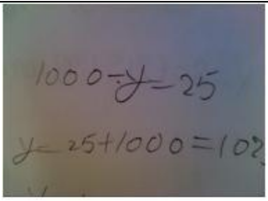
		能用 x、y 等文字符號表徵生活中的變量	能用文字符號表徵生活情境問題中的未知量，並列成等式	能求出等式中文字符號的值，並做驗算	題數	小計(%)
基礎題	加法列式(被加數未知)	一-6		三-8	2	
	加法列式(加數未知）	一-2	二-1-1	二-1-2 二-1-3	2	
	減法列式(減數未知)	一-3	二-4-1	二-4-2、三-4 二-4-3、三-11	4	
	乘法列式(被乘數未知)		二-5-1	二-5-2、三-6 二-5-3、	2	56.25
	乘法列式(乘數未知)	一-4		三-12	2	
	除法列式(被除數未知)	一-5	二-7-1	二-7-2、二 7-3	2	
	除法列式(除數未知)	一-1	二-2-1 二-12-1	二-2-2、二 12-2 二-2-3、二 12-3 三-5	4	
延伸題	加減混合		二-3-1	二-3-2、三-1 二-3-3	2	
	加乘混合列式	一-7	二-11-1	二-11-2、三-9 二-11-3	3	
	減乘混合列式	一-8	二-9-1 二-10-1	二-9-2、二 10-2 二-9-3、二 10-3 三-10、三-13	5	43.75
	加除混合列式	一-9	二-6-1	二-6-2、三-7 二-6-3	3	
	減除混合列式		二-8-1	二-8-2 二-8-3	1	
	小計(%)	20.00	26.67	53.33	100.00	

表 3 前測、後測題目計分表

測驗	題號	計分方式	說明
前測	一、選擇題 1~13	1	答案正確
		0	答案錯誤
	二、應用題 1、3、5、6	3	1 正確列式；2 算出答案；3 驗算
		2	以上 3 項之中有 2 項正確
		1	以上 3 項之中有 1 項正確
		0	以上 3 項皆不正確
	二、應用題 2、4	2	解題正確並算出答案
		1	解題正確或算出答案
		0	解題不正確且無法算出答案
	二、應用題 7-1~4	1	正確寫出算式
		0	無法寫出正確算式
	二、應用題 8	2	能正確列算式並算出答案
		1	能正確列式但答案算錯
		0	無法正確列式
	二、應用題 9	1	用簡單的算法計算出正確答案
		0	無法算出答案
後測	一、填充題 1~9	1	答案正確
		0	答案不正確
	二、應用題 1~12	2	正確列式並以正確步驟算出答案
		1	正確列式但答案算錯或直接以算術方式解出答案
		0	以上 2 項皆不正確
	三、計算題 1~11	2	以移項法則正確解題
		1	直接以逆運算正確解題或計算過程正確但未算出答案
		0	全錯

以後測應用問題第 12 題做範例說明，說明如表 4。

表 4 題目計分範例說明表

題目：媽媽帶 1000 元剛好可以買每瓶 y 元的果汁 25 瓶，請問媽媽買的果汁一瓶幾元?			
給分	2 分	1 分	0 分
學生解題過程			
說明	正確列式並以正確步驟算出答案	正確列式但答案算錯或直接以算術方式解出答案	前 2 項皆不正確

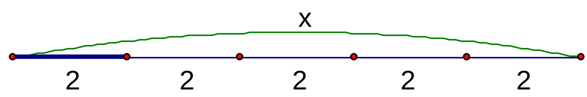
四、教學實施

對國小學生而言，學習代數即是要用符號來表徵問題中數量關係，因此，本研究採用線段圖的教學策略，希望能透過線段圖來幫助學生將文字題適當轉譯成較為抽象的符號，進而能順利解題。

為達成線段圖的教學策略，實驗組的教學設計分為解題歷程的教學和文字題類型兩大部分進行說明。在解題歷程的教學上，參考 Mayer 的解題歷程設計出五步驟的教學設計，分別是瞭解問題、畫出線圖、依圖列式、解未知數、檢核答案，茲以一個題目範例說明如表 5。

本研究教學實施年級為五年級下學期。參考能力指標的分年細目包括了「4-a-02 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係」、「5-a-02 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合運算」以及「5-a-03 能解決使用未知數符號所列出的單步驟算式題，並嘗試解題及驗算其解」。

表 5 實驗組教學設計五步驟說明表

<table>
<tr><td colspan="2">題目：「一條緞帶長 x 公尺，將這條緞帶平分成 5 段，每一段長 2 公尺。緞帶原來有多長？」</td></tr>
<tr><td>步驟</td><td>教學活動說明</td></tr>
<tr><td>(一)瞭解問題(已知條件、解題目標)</td><td>1.老師唸一次題目。
2.請學生再唸一次題目。
3.找出題目中已知與未知條件，並畫線標示出來。
一條緞帶長 χ 公尺，將這條緞帶平分成 5 段，每一段長 2 公尺。緞帶原來有多長？
已知 未知</td></tr>
<tr><td>(二)畫出線段圖(依問題中之條件)</td><td>1.指導學生依題意畫線段圖。
2.依題意把已知數與未知數的關係標式在線段圖的上(x)、下(2)。


3.再一次說明線段圖與題意之關係。</td></tr>
<tr><td>(三)依圖列式(解題計畫及監控)</td><td>1.請學生依照題意與畫出之線段圖列出等式 x÷5＝2。
2.詢問學生列式 2＝x÷5 是否正確，或還有沒有其他列式方式？並請學生說明列式與題目的相關意義。老師說明”＝”的等值性。</td></tr>
<tr><td>(四)解未知數(能依線段圖執行解題)</td><td>1.由圖形看出 x＝2×5。
2.由觀察「部分－部分－整體」的關係，了解移項法則的原理。
(原列式) x÷5＝2
(由圖解 x) x＝2×5＝10
說明÷5 移到等號右邊變成×5</td></tr>
<tr><td>(五)檢核答案</td><td>1.詢問學生怎麼知道算出的答案是否正確。
2.指導學生把答案帶回原列式做驗算。
x＝10 代回原式 x÷5＝2→10÷5＝2</td></tr>
</table>

因此，根據前述的分年細目，教學內容以教科書單元內容編排之文字題題型分類為參考，包括了（1）加法算式（被加數未知）、（2）加法算式（加數未知）、（3）減法算式（被減數未知）、（4）減法算式（減數未知）、（5）

乘法算式（被乘數未知）、（6）乘法算式（乘數未知）、（7）除法算式（被除數未知）、（8）除法算式（除數未知）等八類。本研究解題歷程與 Mayer 的解題歷程對照表如表 6。

表 6 Mayer 解題歷程與本研究解題歷程對照表

階段	步驟	說明（Mayer）	本研究解題步驟
問題表徵	問題轉譯	能將題目陳述句轉譯成個人可以理解語言或圖示。了解題目中已知條件和解題目標。須具備語言知識和語意知識。	1.瞭解問題（已知條件、解題目標）
	問題整合	能認識問題的類型，決定解題所需的資料，用圖畫或符號來表示問題等。須具備基模知識	2.畫出線圖（依問題中之條件）
問題解決	解題計劃及監控	能夠想出解題計劃和監控此計畫的進行。須具備策略知識	3.依圖列式
	解題執行	運用演算技巧完成計劃。須具備程序性知識	4.解未知數 5.檢核答案

Musser 與 Burger（1988）將數學文字題的解題視為一種回饋的歷程，將原來的文字題轉換成數學算式，再求得答案，以說明原來的問題情境，並加以檢核。在代數文字題的解題歷程中，學生若能使用線段圖將代數文字題中蘊含的抽象的數量關係以直觀的方式表達出來，可有助於學生思考，促進問題的解決。蔣治邦（2001）也認為線段圖容易彰顯問題中數量間的「部分－全體」關係，透過線段圖的媒介，注意到問題中的「部分－全體」關係，進而發展運用「部分－全體」關係分析來理解問題情境的能力，提升數學概念的層次。Cummins（1991）的研究指出，學生解題失敗並非完全由於缺乏部分-全體的知識，如將問題的語意做適當修改，讓陳述更清楚，學生便能正確表徵出部分-全體的結構，並成功解題。古明峰（1998）將 Cummins 的成功解題模式修正如圖 1。

如何建立部分-全體的知識與代數文字題的解題連結? Mayer（1992）認為可採基模建構理論加以探討，陳嘉皇（2013）指出基模的發展與轉換是透過學生對具有結構性的問題與所需相似解題方法概念化的歷程。所以透過線段圖策略的教導，應可協助學生透過線段圖理解問題中的數量關係，並形成算式，提高解題的成功率。

因此，在代數文字題的解題歷程中，學習者若能清楚了解題意後，提取部分-全體的基模知識，建構出正確的線段圖表徵，以提升解題成功的機會，所以，在本研究的代數文字題解題的基模知識指的是學生所具有的部分-全體的知識（古明鋒，1998；蔣治邦，1993），學生可依問題結構的分類，提取部分-全體

的基模知識，並利用線段圖來表徵部分-全體的數量關係的能力。

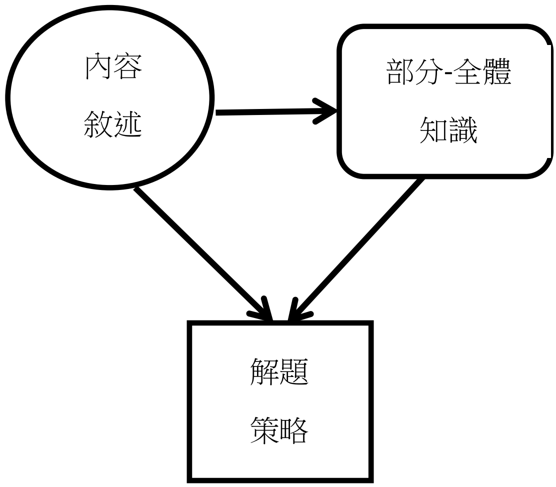


圖 1 成功解題的表現（修改自古明峰，1998）

此外，控制組教學流程如下：教師布題→教師示範解題→詢問學生有無其他解題方法→教師重新布題（類似題）→學生模仿練習→達成精熟。控制組所實施的代數文字題類型，和實驗組相同，共實施上述八種類型文字題的教學。

五、資料分析與處理

本研究收集的資料包括實驗組和控制組的前測、後測及延後測成績，以教學策略為自變項，前測成績為共變項，後測（延後測）成績為依變項，進行單因子共變數分析，以了解線段圖的教學在代數文字題的學習成效。另外使用無母數檢定比較兩組的低、中、高分組的表現情形，再利用獨立樣本 t 檢定分析比較兩組受試者延後測成績的差異，以了解線段圖教學在代數文字題的學後保留情形。

肆、研究結果與討論

一、代數文字題學習成效之差異分析

（一）兩組學生在後測分數之差異分析

利用單因子共變數分析比較兩組學生後測整體得分的差異。從兩組迴歸係數同質性考驗結果得知，兩組未達顯著差異（F＝3.27, p＝.08＞.05），故符合迴歸係數同質性檢定，可以進行共變數分析。實驗組學生後測平均成績為 43.07（標準差為 11.79），控制組學生後測平均成績為 36.40（標準差為 10.75），在以前測為共變數進行共變數分析，組間的 F 值為 14.28（p=.000<.001），達顯著水準，顯示兩組學生的後測成績有顯著差異，且實驗組學生顯著優於控制組學生，表示線段圖教學可以提升學生代數文字題的學習表現。

（二）兩組不同數學能力學生在後測整體得分之差異分析

涂金堂（2007）、Marshall（1995）、Silver（1977）的研究結果指出不同數學能力學生與數學文字題的解題表現具有正相關，因此，本研究也探討不同數學能力在代數文字題的表現情形。本研究將前測成績在各組前 27%定義為高數學能力組，後 27%為低數學能力組，其餘的為中數學能力組。因各組人數較少，故採用無母數檢定分析，茲將兩組不同數學能力的學習成效分析如後。

表 7 顯示，在高數學能力學生方面，兩組學生的後測平均數未達顯著差異（p=.07＞.05），但效果量 η2=.17 為強的效果量，亦即若人數增加的話，實驗組高數學能力學生的學習成效很可能會優於控制組。在中數學能力學生方面，兩組學生的後測平均數達顯著差異，且效果量 η2= .22 為強的效果量，表示在接受線段圖教學後，實驗組中數學能力學生學習成效顯著優於控制組。在低數學能力學生方面，兩組學生的後測平均數未達顯著差異（p=.13＞.05），但效果量 η2= .11 為中的效果量，亦即若人數增加的話，實驗組低數學能力學生的學習成效有可能優於控制組。

表 7 兩組不同數學能力學生的後測無母數檢定摘要表

數學能力	組別	N	M	Mann-Whitney U 統計量	Z	η2
高	實驗組	8	50.25	14.5	-1.85	0.17
	控制組	8	44.63			
中	實驗組	14	46.07	49.00	-2.26*	0.22
	控制組	14	39.36			
低	實驗組	8	30.63	17.00	-1.68	0.11
	控制組	8	23.00			

綜上分析所述，線段圖教學對於五年級學生在代數文字題解題的表現上有

顯著的學習成效。此結果和多數研究結果相同（古明峰，1998；吳昭容，1990；魏君芝，2003；Van Garderen, 2006）。Lewis 與 Mayer（1987）認為學生代數文字題學習感到困難的部份是如何將語文轉譯為算式；何縕琪與林清山（1994）指出若同時強調語言轉譯和畫出整合的數線圖，可使學生在表徵階段注意題目的語意關係，進而改善低解題正確率學生的表現；而本研究的結果顯示線段圖教學可有效提高代數文字題的學習成效。因此，線段圖可適切地將語文轉譯為算式，讓受試者能進一步了解題意，並掌握數量關係，增進解題能力。

在高數學能力學生的解題表現上，雖然實驗組得分高於控制組，但未達顯著。代數文字題解題成功與否，取決於個體內在表徵與外在表徵之間的轉譯是否順利。有研究（陳霈頡、楊德清，2005；謝哲仁、謝佩君，2013）指出引導學習者從不同的角度思考問題，有助於數學問題的解決。因此，欲使外在表徵有助於解題，不能選擇太過於簡單的問題。本研究的題目對高數學能力學生而言可能相對簡單，且高數學能力學生理解能力高，其已具備穩固的「部分－全體」的數量關係的基模知識，所以表現良好穩定，因此線段圖教學的效果對其影響較不明顯。

依照統計學的理論，人類的能力屬常態分佈，所以中成就學生不論是在人數上或可塑性而言，應為極需要關注的一群，因為高成就學生有資優教育栽培，成績表現也較受人重視；低成就學生可透過資源班與攜手計畫進行補救。然這群夾在高、低成就間的中成就學生，變成了可塑性相當高的學生（黃俊銘，2010），雖然中數學能力學生的學習狀態較不穩定，但可塑性高，且游淑媛（2012）的研究發現有視覺引導的教學能提升中數學能力學生的上課意願及理解程度，亦即對線段圖教學的理解吸收能力較強，而藉由線段圖的表徵方式，將原來不穩固的「部分－全體」的數量關係的基模知識建構得更加穩固，因此兩組中數學能力學生的表現達到顯著差異，可見線段圖教學對中數學能力學生的文字代數題的學習成效最好。

文獻指出許多學生在不同表徵方式間的轉換是有困難的（謝哲仁、謝佩君，2013），由於從圖示轉換成列式的過程，需要再經過一次的內在表徵，因此多數研究（吳昭容，1990；何縕琪、林清山，1994；徐文鈺，1992）提出對於解題能力較弱的學生而言，圖示是需經過教導與學習的。對於低數學能力的學生而言，理解能力本就較差又要學習線段圖，對某些學生而言可能增加學習負荷，且學習時間過短，來不及熟練並納入自己的解題基模中，因此學習效果不如中數學能力學生顯著。

二、代數文字題學習保留成效之差異分析

（一）兩組學生在延後測成績之差異分析

本研究於後測結束一個月後，讓兩組學生再接受代數文字題的延後測驗，以了解兩組學生的保留情形。利用獨立樣本 t 檢定來考驗兩組學生延後測成績的比較以及兩組學生延後測與後測成績差異的比較。在延後測方面，實驗組的平均分數為 43.73（標準差為 10.66），控制組的平均分數為 34.50（標準差為 10.78），兩組延後測平均分數 t 檢定的結果達顯著差異（t 值=3.34, p<.01, η2 =.16），實驗組顯著高於控制組，意即不同教學法對兩組學生的延後測成績有顯著的影響。在延後測與後測分數差異方面，實驗組的差異平均分數為 0.67（標準差為 4.15），控制組的平均分數為-1.90（標準差為 5.16），兩組延後測減去後測的分數的平均分數 t 檢定的結果達顯著差異（t 值=2.13, p<.05, η2 =.07），且實驗組高於控制組，表示實驗組在線段圖教學後，代數文字題的學習保留效果顯著優於控制組。

（二）兩組不同數學能力學生在延後測得分之差異分析

因各組不同數學能力的學生人數太少，所以運用無母數檢定兩組不同數學能力學生延後測成績以及延後測減去後測的成績差的比較。

在高數學能力學生方面，表 8 顯示，兩組學生的延後測平均數未達顯著差異（p=.051＞.05），但效果量 η2=.23 為強的效果量，亦即若人數增加的話，實驗組高數學能力學生的保留效果很可能優於控制組。此外，再從表 9 的結果也顯示兩組延後測減去後測的分數差的平均數也未達顯著差異（p=.59>.05），但效果量 η2=.07 為中效果量，亦即若人數增加的話，實驗組高數學能力學生的延後測減去後測的分數差有可能優於控制組。在中數學能力學生方面，表 8 顯示，實驗組延後測平均分數顯著優於控制組（Z 值=-3.66, p=.000<.001, η2 =.50），再從表 9 的結果來看，實驗組延後測減去後測的分數差也顯著優於控制組（Z 值=-2.37, p=.02<.05, η2 =.23）。表示實驗組中數學能力學生在線段圖教學後，代數文字題學習成效不僅獲得保留且還提升，其保留效果顯著優於控制組。在低數學能力學生方面，表 8 顯示，兩組延後測平均分數未達顯著差異（p=.29>.05），但效果量 η2=.09 屬中效果量，亦即若人數增加的話，實驗組低數學能力學生的保留情形可能優於控制組。再從表 9 的結果顯示，兩組延後測減去後測的成績差異的平均數未達顯著差異（p=1.00>.05），且效果量 η2=.01 也未達小的效果量。表示兩組低數學能力學生的保留情形沒有差異。

表 8 兩組不同數學能力學生的延後測無母數檢定摘要表

數學能力	組別	N	M	Mann-Whitney U 統計量	Z	η2
高	實驗組	8	50.13	13.50	-1.95	0.23
	控制組	8	42.88			
中	實驗組	14	47.29	18.50	-3.66***	0.50
	控制組	14	35.50			
低	實驗組	8	31.13	22.00	-1.05	0.09
	控制組	8	24.38			

*** p< .001

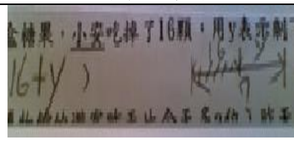
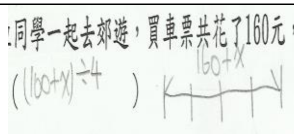
表 9 兩組不同數學能力學生延後測和後測差異的無母數檢定摘要表

數學能力	組別	N	M	Mann-Whitney U 統計量	Z	η2
高	實驗組	8	-0.13	27.00	-.54	0.07
	控制組	8	-1.75			
中	實驗組	14	1.21	46.50	-2.37*	0.23
	控制組	14	-3.86			
低	實驗組	8	0.50	32.00	.00	0.01
	控制組	8	1.38			

* p<.05

另外，實驗組的學生經過線段圖的教學策略之後，其在後測的解題大都會使用線段圖的解題策略進行解題，表 10 是實驗組學生使用線段圖解題策略的實例。

表 10 實驗組學生使用線段圖解題策略的實例表

題號	題目	解題策略	解題策略說明
一-2	有一盒糖果，小安吃掉了 16 顆，用 y 表示剩下的糖果數量，請問一盒糖果原來有幾顆可以怎麼表示？		使用線段圖的策略並畫出正確的線段圖而順利解題
一-9	有 4 位同學一起去郊遊，買車票共花了 160 元，買點心花了 x 元，每個人應該要分攤多少元可以怎麼表示？		使用線段圖的策略並畫出正確的線段圖而順利解題

綜上發現，在經過一段時間之後，實驗組學生可能因為線段圖的教學策略，使其建立更穩固的代數解題能力，及遇到較困難的題目也會嘗試畫出線段圖來幫助解題，使得保留成效較為顯著。而控制組學生在一般教學策略下，可能容易流於記憶或背誦解題步驟，對代數解題的能力較薄弱，因此經過一段時間之後，忘記解題步驟，且遇到較困難的問題時，也沒有適當的策略幫助其解題，於是在延後測表現不如實驗組。因此，線段圖教學對五年級學生代數文字題的學習有良好的保留成效。

此外，實驗組中數學能力學生的保留成效顯著優於控制組，可能的原因是中數學能力學生的可塑性高，對於新的解題策略理解及接受度較大，將線段圖的解題策略內化後便不容易遺忘，因此線段圖教學對於中數學能力學生在代數文字題的學習成效及學習保留有顯著的成效，此研究結果與魏君芝（2003）、林秀燕（2004）的研究結果相似。

伍、結論與建議

一、結論

本研究探討線段圖教學對國小五年級學生代數文字題學習的表現與保留之影響，得出以下三個結論：

（一）線段圖教學對學生代數文字題的學習表現有顯著成效

接受線段圖教學的學生，在代數文字題的解題表現上，無論在後測或延後測的表現，都顯著高於接受一般教學策略的學生，尤其是對於較困難的題目，使用線段圖可以幫助學生了解題意並釐清數量間的關係，進而正確列式與成功解題。再以不同數學能力的學生來比較，發現實驗組高中低數學成就學生的學習表現，大都高於控制組高中低數學成就學生的表現，其中又以中數學成就學生在學習與保留的成效最為顯著，因為線段圖可增進學生對代數文字題中數量關係的理解與正確列式，且在一段時間後仍有良好的保留效果。而控制組學生在剛教學完時，其解題步驟記憶猶新，學習成效尚可，但一段時間後，可能已忘記解題步驟，使控制組在延後測的表現不如實驗組。由上可知，線段圖教學可促進五年級學生代數文字題的學習成效，也有良好的學習保留效果，尤其對中數學成就學生的成效最為顯著。

（二）線段圖可協助學生以圖形表徵進行問題轉譯，進而成功解題

接受線段圖教學的學生在理解題意後將問題轉譯並整合成表示問題的線段圖，並能順利解題；控制組學生因已遺忘解題步驟而解題失敗。線段圖策略能減少解題時過分依賴關鍵字策略的使用，尤其對於較困難的題目而言，因為題意敘述較為複雜，實驗組高、中成就的學生大都能畫出與題意符合的線段圖幫助順利解題，但部分低成就學生則因畫不出符合題意的線段圖，而無法成功解題。由此可知線段圖教學能協助學生以圖形表徵為策略來進行解題，但線段圖的正確與否會影響解題的成敗。

（三）線段圖作為教學用途的外在表徵有助於學後保留效果

由以上結果可以發現接受線段圖教學的學生在代數文字題的後測和延後測的表現皆顯著優於控制組的學生，究其原因可能是因為在線段圖的教學過程中，會引導學生分析題目中的語意關係，再將文字敘述轉譯為具體的圖示表徵來幫助學生了解題意，並藉由畫出線段圖與題意做相互的檢視後，列出正確的代數式而順利解題，提升解題能力，且也有良好的保留效果，因此以線段圖作為教學用途的外在表徵可有助於五年級學生代數文字題的學習後的保留成效。

從認知心理學的觀點，數學解題是一種高層次思考的心理運作，包含問題表徵與問題解決兩個解題歷程。在問題表徵的歷程中，解題者需要具備基模知識，才能將相關的訊息統整起來，而產生正確的問題表徵。當解題者採用線段圖時，就能產生豐富的解題的基模知識，協助解題者進行正確的問題表徵，因此，代數文字題問題的線段圖表徵與數學解題的成功與否有關。

二、建議

本研究根據研究發現，提供兩點建議供未來參考。首先在教學上，本研究發現線段圖的使用，有助於學生理解代數文字題中數量的關係，進而列出正確的算式來解題，因此建議教師在代數概念教學時，可採用線段圖來協助學生進行問題的轉譯與數兩關係的理解，以提升學生的學習表現。但仍須注意線段圖對於低成就學生解題的影響，應提供更多的時間，讓低成就學生能畫出正確的線段圖來協助解題，否則對低成就學生的學習成效將不明顯。其次在未來研究上，本研究發現線段圖對五年級學生在代數文字題的學習上有顯著的成效，未來可針對不同年級代數相關的主題進行探討，或是進一步針對學生在解題思考的歷程，進行質性的分析，以更深入瞭解線段圖對於學生解題思考的協助與成效。

參考文獻

古明峰（1998）。加減法應用題語意知識對問題難度之影響暨動態評量在應用問題之學習及遷移歷程之研究。**新竹師院學報，11**，391-420。

吳昭容（1990）。**圖示對國小學童解數學應用問題之影響**（未出版之獨立研究）。國立臺灣大學心理研究所，臺北。

吳明隆（2013）。**SPSS 統計應用學習實務：問卷分析與統計應用**。新北：易習圖書。

何縕琪、林清山（1994）。表徵策略教學對提升國小低解題正確率學生解題表現之效果研究。**教育心理學報，27**，259-279。

林秀燕（2004）。**以圖示策略融入低年級教學對改變類及比較類加減法文字題學習成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立屏東師範學院數理教育研究所，屏東。

林香、張英傑（2004）。國小數學資優生運用畫圖策略解題之探究。**國立臺北師範學院學報，17**（2），1-22。

胡蕙芬、李源順（2005）。分數的整數倍教學實驗。**科學教育研究與發展，2005 專刊**，129-153。

徐文鈺（1992）。**圖示策略訓練課程對國小五年級學生的數學應用題解題能力與錯誤類型之影響**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學教育心理與

輔導研究所，臺北。

涂金堂（2007）。國小學生數學文字題問題結構與數學解題表現之相關研究。**屏東教育大學學報，26**，101-136。

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北：教育部。

陳竹村（2002）。國小數學解題工具發展模型的探討。**花蓮師院學報，13**，149-167。

陳霈頡、楊德清（2005）。數學表徵應用在教學上的探究。**科學教育研究與發展，40**，48-61。

陳建州、劉祥通（2007）。一位國中學生解比例問題之個案研究。**臺灣數學教師電子期刊，10**，12-38。

陳嘉皇（2013）。國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究。**教育科學研究期刊，58**（1），59-90。

游淑媛（2012）。**視覺引導在國中數形規律教學上之應用**（未出版之碩士論文）。國立交通大學理學院科技與數位學習學程，新竹。

黃俊銘（2010）。**圖像表徵介入前和介入後對六年級學生解未知數問題之歷程探討**（未出版之碩士論文）。國立臺南大學數學教育系，臺南。

詹勳國、李震甌、莊蕙元譯（2004）。**數學的學習與教學－六歲到十八歲**（M. Nickson 原著，2000 年出版）。臺北：心理。

蔣治邦（1993）。中年級學童解決加減文字題能力之探討：多於資訊與兩步驟問題。**科學教育學刊，1**，189-212。

蔣治邦（1999）。**年級因素對解讀線段圖之影響**。國科會專題研究計劃成果報告（NSC 89-2413-H-004-005），未出版。

蔣治邦（2001）。**學童解讀線段圖能力之再探**。國科會專題研究計劃成果報告（NSC 90-2413-H-004-012），未出版。

蔡宜芳、楊德清（2007）。數學表徵融入數學教學之經驗分享。**臺灣數學教師電子期刊，9**，26-35。

謝哲仁、謝佩君（2013）。線性規劃動態電腦輔助教材設計及其補救教學個案研究。*International Journal of Science and Engineering, 3*(3), 41-57。

魏君芝（2003）。**國小五年級數學低成就學生圖示策略教學成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺中師範學院國民教育研究所碩士，臺中。

羅綸新、劉宛枚（2012）。個人化文本電腦輔助教學對國小代數文字題學習之影響。**課程與教學，15**（1），233-256。

Adelman, C. (2006). *The toolbox revisited: Paths to degree completion from high school though college*. Washington, DC: United States Department of Education.

Akcaoglu, M., & Matthew J. K. (2014). Cognitive outcomes from the Game-Design and Learning (GDL) after-school program. *Computers & Education, 75*, 72-81.

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D., Marco-Giménez, L., González-Calero, J. A., Moreno-Picot, S., Moreno-Clari, P., & Quirós, P. (2014). Providing personalized guidance in arithmetic problem solving. In M. Kravcik, O. C. Santos, & J. G. Boticario (Eds.), *Proceedings of the 4th International Workshop on Personalization Approaches in Learning Environments, CEUR workshop proceedings* (pp. 42-48). Denmark: CEUR.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 2-33.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards* (mathematics standards). Retrieved from http://www.corestandards.org/the-standards/mathematics.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretation of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8*, 261-289.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M., & Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematics word problems. *Journal of Educational Psychology, 83*, 61-68.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Prompting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: NCTM.

Diezmann, C. (2005). Assessing primary students' knowledge of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. In P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonagh, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 289-296). Sydney, Australasia: MERGA.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*, 658-672. doi:10.1016/j. learninstruc.2007.09.011.

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 514-520.

Jitendra, A. K., Dupuis, D. N., Star, J. R., & Rodriguez, M. C. (2014). The effects of schema-based instruction on the proportional thinking of students with mathematics difficulties with and without reading difficulties. *Journal of Learning Disabilities*. Prepublished October, 13, 2014, doi: 10.1177/0022219414554228

Jitendra, A. K., Dupuis, D. N., Rodriguez, M. C., Zaslofsky, A. F., Slater, S., Cozine-Corroy, K., & Church, C. (2013). A randomized controlled trial of the impact of schema-based instruction on mathematical outcomes for third-grade students with mathematics difficulties. *The Elementary School Journal, 114*(2), 252-276.

Jitendra, A. K., Griffin, C., Deatline-Buchman, A., & Sczesniak, E. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *Journal of Educational Research, 100*, 283-302.

Jitendra, A. K., & Star, J. R. (2011). Meeting the needs of students with learning disabilities in inclusive mathematics classrooms: The role of schema-based instruction on mathematical problem-solving. *Theory Into Practice, 50*(1), 12-19.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development, 48*(4), 63-85.

Kieran, C. (2003). The twentieth century emergence of the Canadian mathematics education research community. In G. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 1701-1778). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.

Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities 47*(2), 103-115.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. In E. D. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lewis, A. B. (1989). *Enhancement of arithmetic word problem-solving skill through representation training* (Unpublished doctoral dissertation). University of California, Santa Barbara.

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscommprehension of relation statements in arithmetic word problems. *Journal of Education Psychology, 79*, 361-371.

Linchevski, L. (1994). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 113-120.

Maccini, P., & Hughes, C. (2000). Effects of problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Research and Practice, 15*, 1-21.

Marshall, S. P. (1995). Some suggestions for alternative assessments. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, & R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively diagnositc assessment* (pp. 431-453). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York, NY: W. H. Freeman and Company.

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. In P. A. Alexander & P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 287-303). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Montague, M. (2003). *Solve It! A practical approach to teaching mathematical problem solving skills.* VA: Exceptional Innovations, Inc.

Montague, M. (2006). *Math problem solving for middle school students with disabilities.* Research report of the Access Centre: Improving outcomes for all students K-8. Retrieved from http://www.k8accesscenter.org/default.asp

Musser, G. L., & Burger, W. F. (1988). *Mathematics for elementary teacher.* New York, NY: Macmillan.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Novick, L., & Hurley, M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: That is the question. *Cognitive Psychology, 42*, 158-216. doi:10.1006/cogp.2000.0746.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 39-60.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Puig, L., & Cerdan, F. (1990). Acerca del caracter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In E. Filloy & T. Rojano (Eds.), *Simposio internacional sobre investigación en educación matemática* (pp. 35-48). Cuernava: Morelos: PNFAPM.

Sajadi, M., Amiripour, P., & Malkhalifeh, M. R. (2013). The examining mathematical word problems solving ability under efficient representation aspect. *Mathematics Education Trends and Research,* 1-11. doi: 10.5899/2013/metr-00007

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York, NY: Academic Press.

Silver, E. A. (1977). *Student perceptions of relations among mathematical word problems* (Unpublished doctoral dissertation). Columbia University, New York.

Star, J. R., Pollack, C. Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology, 40,* 41-54. doi: dx.doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.05.005

Steffe, L. P., Ludlow, A. S., & Ning, T. C (1989). *Elementary algebra for teachers: A quantitative approach.*

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In Frank K. & Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.

Tall, D., de Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 1-13.

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17,* 322-335. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.02.006.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 63-75.

Van Garderen, D. (2006). Teaching visual representation for mathematics problem solving. In M. Montague & A. K. Jitendra (Eds.), *Teaching mathematics to middle school students with learning difficulties* (pp. 72-88). New York, NY: The Guilford Press.

Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An Investigation of an explicit instruction model. *Learning Difficulties Research and Practice, 18*(2), 121-131.

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 177-204. doi:10.1080/10986061003654240

The Influence of Line-Diagram Instruction on 5th Grade Students' Learning Performance of Algebraic Word Problems

Shih-Chun Lin* Wei-Min Hsu Wen-Jin Kuo*****

The Line-Diagram (LD) was used as teaching strategy to investigate the impact on 5th grade students' learning performance of algebraic word problems. Quasi-experimental method was adopted and 60 students from two classes participated in this study, one class assigned as experimental group with LD teaching, and the other control group with traditional teaching. After 8-lesson instruction in two weeks, mathematical cognitive test, designed by researchers, was used to exam the influence of LD on students' learning performance. The results indicated that in the experimental group, students' performance were significantly better than the control group on the post-test and extended-test. Moreover, the middle-achievement students showed more obvious progress on learning. They tried to understand the relationship among numbers by drawing line-diagram, which helped them to solve the problem successfully. For the control group, it was easy for students to use key-words and functional reciprocal strategy to solve the problem in the post-test, partly because their memory was still fresh enough. However, it became difficult for them in the extended test.

Keywords: algebra word problems, line-diagram instruction, learning performance

* Shin-Chun Lin: Teacher, Shih-Hu Elementary School, Kaohsuing City

** Wei-Min Hsu: Associate Professor, Department of Science Communication, National Pingtung University

*** Wen Jin Kuo: Mathematical Teacher, National Nei-Pu Senior Agricultural-Industrial Vocational High School

---

Corresponding Author: Wen Jin Kuo, e-mail: wenjinkuo@gmail.com