

# 臺灣與芬蘭國小數學教科書分數 教材內容之分析

徐偉民\* 黃皇元\*\*

本研究旨在探討臺灣部編版與芬蘭 WSOY 版 Laskutaito in English 國小數學教科書分數教材內容的異同。以「問題」為分析單位，採內容分析法探討兩國分數教材內容呈現的異同。研究發現，在問題的數量上，芬蘭數學問題數量是臺灣的兩倍，提供學生較多的學習機會；在分數主題比重與概念呈現上，兩國均以「分數基本定義」所佔比重最高，且以螺旋式的方式呈現，臺灣大部分分數概念比芬蘭早一年呈現；在問題呈現方式上，兩國分數問題的表徵形式以「數學型態」最多，問題的知識屬性以「程序性知識」最多，但芬蘭在數學型態及程序性知識的比重上均超過五成，臺灣則比重分佈較平均，而且臺灣例題呈現多元的解題思考和歷程，芬蘭例題則以定義且算式為主要的方式來呈現。

關鍵字：內容分析、分數教材、數學教科書

\* 作者現職：國立屏東教育大學數理教育研究所副教授

\*\* 作者現職：高雄市林園國小教師

---

通訊作者：徐偉民，e-mail: ben8535@mail.npue.edu.tw

## 壹、緒論

### 一、研究動機與目的

分數對國小學生來說是重要且基礎的數學概念之一。分數的重要性可從三個層面來看，第一是實際層面，有效的處理分數概念，可廣泛增進了解與掌握真實世界問題的能力；第二是心理層面，分數提供豐富的領域來發展兒童智力及擴展心智結構；第三是數學層面，分數概念的瞭解提供之後學習小數、比/比例等數學概念的基礎(Behr, Harel, Post & Lesh, 1992)。雖然分數對數學學習如此重要，但是許多研究顯示分數概念及運算的學習對國小學生來說卻是相當困難的課題(呂玉琴, 1991; 林碧珍, 1990; 洪素敏、楊德清, 2002; 劉秋木, 2002; Behr et al., 1992; Son & Senk, 2010)。

而數學教科書是學生數學學習的主要來源，它不僅提供教學內容、教學順序和課程實施的架構，也是影響教師數學教學的最主要因素(徐偉民、徐于婷, 2009; Lloyd, 2008; Nicol & Crespo, 2006)。Grouws, Smith 和 Sztajn (2004)的研究發現，有超過 2/3 的 4-8 年級的教師，數學課讓學生學習教科書內的數學問題；Stein, Remillard 和 Smith (2007)發現不同版本的數學教科書，在內容呈現的順序、方法、焦點、和組織的形式上都有很大的差異，將會影響教師的教學和學生的學習；Tarr 等人(2008)也認為不同哲學觀與內容呈現的數學教科書，對學生的數學學習有關鍵的影響；徐偉民(2011a, 2011b)的研究發現，教師的數學教學幾乎完全採用教科書中的數學問題。由此來看，數學教科書是教師數學教學和學生數學學習的主要依據。教師在教學上對教科書有相當大程度的依賴，認為教科書是教學上提供詳細資訊及正確答案的重要來源(Son & Senk, 2010)。因此，要了解學生分數學習的困難，教科書內容的分析是一個值得嘗試的方法。

近年來，國內外數學教科書的研究逐漸受到重視，許多相關研究陸續出爐，透過跨國數學教科書的比較，瞭解到不同國家在不同主題(如代數，徐偉民、徐于婷, 2009; 陳仁輝、楊德清, 2010; 分數，Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Son & Senk, 2010)、不同年級編排和呈現上的異同(如一年級，楊德清、施怡真、徐偉民、尤欣涵, 2011)，或是瞭解不同國家數學教科書中數學問題呈現方式的異同(如 Zhu & Fan, 2006)，藉此來瞭解自己國家數學教科書中數學概念編輯和呈現的特色。綜觀國內數學教科書分析研究的主題，發現以幾何相關主題為最多人所研究(如尤欣涵, 2010; 徐偉民、林美如, 2009; 莊月嬌、張英傑, 2006)，而以分數為主題的相關研究卻相當少，僅有蔡麗蓉(2003)針對國內三種不同審定本數學教科書，以及吳麗玲、楊德清(2007)針對臺灣、美國與新

加坡國小五、六年級的分數教材進行分析比較。因此，以分數為主題的跨國教材分析有值得深入研究之必要，可以藉由不同國家的比較與分析，來了解臺灣教科書分數教材編排與呈現的特色，以及可能不足之處，作為未來教科書編修或教師分數教學的參考。

目前，國際間對中小學生所進行的數學成就評比，PISA (Programme for International Student Assessment)的結果是最受到國際重視的評比之一。而芬蘭和臺灣在 PISA 上都有相當優異的表現，但芬蘭的表現更令全球驚豔：芬蘭在 2000，2003 年的 PISA 測驗中名列第一(Organisation for Economic Co-operation and Development, [OECD], 2001, 2004)；在 PISA 2006 年雖名列第二，但和第一的臺灣之間沒有顯著差異，在個別差異方面，差異幅度最小(OECD, 2007)，而臺灣學生數學能力存在著明顯的差距(林素微，2008；魏曼依，2007)；在 PISA 2009 的測驗結果中，兩國雖然整體名次略有下滑，但仍屬於表現優異的國家(分居 5, 6 名，只和前三名的上海、新加坡和香港有顯著差異，兩國學生的表現並無差異)，但臺灣學生的差異幅度仍然高於芬蘭的學生(OECD, 2010)。從芬蘭歷年來在 PISA 的測驗表現，顯示芬蘭學生在數學方面的表現，有值得臺灣學習的地方。

Malaty (2007)指出，芬蘭學生在 PISA 測驗中的優秀表現，有一個主要的原因是教師可以根據國定課程來發展與設計。由此來看，芬蘭的數學教科書對學生的數學學習有關鍵的影響。WSOY 出版社所發行 Laskutaito 數學教科書，目前大概佔芬蘭中、小學數學教科書市場六至七成以上，是芬蘭各中、小學校使用比例最高的教材(陳之華，2007)。臺灣部編版數學則是因應九年一貫課程實施後，為提升教科書品質、平衡市場運作機制等作用(鄭國順、牟中原，2005)，由國立教育研究院籌備處主編，民間出版社發行的數學教科書。部編版發行後，在 2005 至 2009 年間，全國的平均市占率最高，達 38%(翰林我的網，2010)。另外，研究也發現藉由跨國的教科書進行深入的分析比較，可以更清楚瞭解本國之數學課程與教材之優劣，作為後續提升學生數學學習的參考(徐偉民、徐于婷，2009；Stigler & Hiebert, 2004; Törmroos, 2004)。基於上述理由，本研究決定以臺灣部編版和芬蘭的 WSOY 版 Laskutaito in English 的國小數學教科書為對象，針對分數教材進行分析，來了解兩國教科書中分數教材呈現的異同，作為後續提升學生分數學習表現的參考。

## 貳、文獻探討

### 一、臺灣與芬蘭分數教材的目標

臺灣和芬蘭的數學課程，都歷經不同階段數學教育理念和課程的改變：臺灣 64 年版課程強調論理結構和知識導向，到 82 年版強調心理結構和知識建構，再到 90 暫綱強調能力培養和思考型態，以及 92 正綱重回強調論理結構、知識導向和演算能力(鍾靜，2005)；而芬蘭受到美國數學課程改革的影響，在 1970 年代推動「新數學」(New Math)課程，1980 年代課程強調「回歸基礎」(Back to basics)，1990 年代課程強調「解題」(Problem solving)，2000 年以後課程強調標準本位(National standards)(Pehkonen, 2009)。兩國目前數學課程的整體目標上，都希望學生學習數學相關的知識和技能外，還強調培養學生的數學素養，並且強調在解題的過程中，來發展學生思考、推理、溝通等能力(教育部，2003；National Board of Education [NBE], 2004; Pehkonen, 2009)。課程內容都強調和學生生活經驗的連結，從過去數學知識結構的編寫方式，逐漸轉向學生和能力本位方式的編寫(鍾靜，2005；Pehkonen, 2009)。雖然，兩國中小學數學課程劃分不同的學習階段(臺灣分為 1-3、4-5、6-7、8-9 年級四個階段，芬蘭分為 1-2、3-5、6-9 年級三個階段)，但學習的主題都包含數與計算、幾何、代數、測量、統計與機率等。整體來看，兩國數學課程目標相似，除了都採分階段、分主題的方式來規劃外，也希望在課程中培養學生的數學知識、技能和解題應用的能力。

再細部檢視臺灣數學課程中分數教材的目標(92 正綱)，發現和分數相關的階段目標共有 12 條，再從這 12 條階段目標中細分成 15 條內容明確的分年細目(如 5-n-04 能用約分、擴分處理等值分數的換算)，其中五年級有 6 條、六年級 4 條、四年級 3 條、二、三年級各 1 條，而內容包含了「平分」、「測量」、「比例」、「部分/整體」等四種不同的意義(教育部，2003)：二年級從平分的概念進入分數的啓蒙；三年級要求學生能在具體情境或活動中掌握分數概念，包含離散量情境下的平分及部份/全體的活動；四年級引入帶分數及等值分數的問題，要求學生了解真分數、假分數、帶分數之意義，並進行同分母分數之加、減運算，以及帶分數除外的整數倍計算；五年級進入異分母分數的比較與加減，並開始分數的乘法與比率概念的應用；六年級進入分數除法運算的學習，並進行分數的四則混合運算，以及比和比值的概念(教育部，2003)。

芬蘭核心課程綱領以三部分來呈現不同階段課程的目標和內容：首先，呈現該階段整體數學學習的目標，如理解概念的結構；接著呈現不同數學學習主題的核心內容，包含數與計算、幾何等；最後呈現學生在該階段學習結束時，包含思考與工作的技能、以及在不同學習主題上理想的學習表現(NBE, 2004)。芬蘭數學課程綱要中，共列出 8 條與分數相關的各階段核心內容(相當於臺灣的階段目標)，但沒有列出各年級的內容。從綱要中指出的理想學習後表現來看，

芬蘭的分數啓蒙也從二年級開始，透過具體的意義，引入分數概念；第二階段(3-5年級)是分數學習最主要的階段，除了分數的概念外，分數的轉換、分數與小數和百分比的關係，以及分數與小數的四則運算都是這一階段重要的主題；第三階段(6-9年級)則是等值分數及分數和小數間的轉換、比和比例等主題。

進一步比較兩國分數教材目標的特色，發現臺灣分數教材目標的特色有：以「情境」的鋪陳作為概念介紹的前導；先「同分母」再「異分母」；先「認識分數的意義」再比較、再加減、再乘除；涵蓋分數多重的意義；強調與其他數學概念(如小數、百分比等概念)的連結；重視「日常生活應用的能力」。而芬蘭分數核心內容的特色有：強調分數的「表徵」；分數的概念及運算並重；強調分數與其他數學概念的連結等。兩國分數學習目標雖各有特色，但都強調從生活情境的具體物引入，以及與其他數學概念的連結。而且兩國在分數教材的目標中，不但都明確指出了分數學習涵蓋的主題(包括分數的啓蒙、意義、運算和應用)，同時也指出希望在分數教材中，培養學生對於分數概念的理解、演算能力的熟練、以及相關問題的解決能力。兩國分數教材目標中呈現的分數學習主題，以及意圖培養學生的知識和能力，可以作為後續分析兩國教科書分數教材的參考。

## 二、分數的意義、學習困難和表徵形式

### (一) 分數的意義與學習的困難

分數的起源來自人類日常生活「分東西」的概念，當整數不能滿足需求使用時，便建立一套數學模式來處理不滿一個單位量的量數值化的問題，於是發展出分數的概念(謝堅、蔣治邦、林昭珍、吳淑娟，2001)。在數學上是以有理數來定義分數，即「 $p/q$ ,  $p, q \in Z, q \neq 0$ 」。在學習分數的過程中，學生應該發展出三項分數的概念：分數的命名、意義和運算，但在使用上又依情境的不同而有不同的用法及解釋(Kennedy & Tipps, 2000)。Kieren (1976)最早提出分數的不同意義，包含是整數系的延伸、代表測量的量或數線上的一點等，後續研究者根據 Kieren (1993)的定義來進行延伸。綜合國內外研究者的定義(林碧珍，1990；呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩，2009；Behr, et al., 1983；Dickson, Brown & Gibson, 1984)，大致可歸納出分數的五種意義，分別為：部分/整體關係(包含子集/集合)、整數相除、運算子、數線上的一點、比/比值。分數的每一種意義都與特定的認知結構相關連，因此學生學習分數時，必須在一連串的發展過程中逐一呈現其意義，才會有完整的分數學習(Dickson, et al., 1984)。

分數在國小數學課程中占有極重要的份量，然而分數的教與學卻困難重重。不但是多數學生的夢魘，就連部分國小教師也視為畏途(呂玉琴, 1998)，因為分數是學童第一次學習數學中有關兩個量的相對比較關係，且分數具有多重意義和多種子概念(如單位概念、等分概念等)，而這些子概念又牽涉「連續量」與「離散量」的不同情境，並且具有一些特殊的性質，如：等值、稠密性等(Kieren, 1993)。因此，學生在學習分數時需要較長的時間與較仔細的鋪陳，才能發展對於分數概念的理解(呂玉琴, 1991)。但 Behr 等人(1983)發現學校數學介紹有關分數教材時太強調程序性技能與計算的演算法，而忽略學生對分數意義的了解，使得學生對分數符號與分數意義疏離，只會機械式地使用算則來解題而不了解算則的意義。而國內研究者呂玉琴(1991)、洪素敏和楊德清(2002)的研究也發現，國小學生學習分數時常因為忽略單位量，在處理部分/整體、子集合/集合或數線三種模式的問題時，常會有指認單位量的困難；或是受整數基模和運算方式的影響，將分數  $a/b$  中的  $a$ 、 $b$  視為兩個獨立的個體。這些都是因為對於分數意義不瞭解所造成的結果。因此，臺灣和芬蘭的分數教材在分數基本意義上，涵蓋的意義有哪些？如何的鋪陳與呈現？這都將影響學生對於分數主題的學習成效。

### (二) 分數的表徵形式

「表徵」是學習的重要媒介，也是個體運思及溝通的重要工具。表徵的功能可使數學概念具體化、可成為溝通的工具、可成為運思的材料、以及可成為解題的工具。Lesh, Post 和 Behr (1987)提到數學學習及解題有五種不同的表徵，包括實物情境(real-world situation)、具體操作物(manipulative models)、圖形(pictures)、口語符號(spoken language)及書寫符號(written symbols)。在數學學習的過程中，學生不但需要了解數學表徵的意義，也要能運用不同形式的表徵來與人溝通，進行解題。Behr, Wachsmuth, Post 和 Lesh (1984)強調表徵間的轉換能力是影響學生數學學習、問題解決及產生有意義學習的關鍵；Artzt 和 Armour-Thomas (2002)也主張透過多重表徵的呈現，可以促進學生對某一概念的理解。因此，Behr 和 Post (1988)主張要建立不同分數表徵之間的連結與轉換，才能建立學生對於分數概念的理解。其中，圖像表徵的使用是在幫助學生連結數學符號及內在的心理表徵，連結概念的多種意義，並建立正確的概念，以避免使用記憶的規則。而過去的研究者將分數的圖像表徵進一步分成面積、離散量和數線三種模式(林碧珍, 1990；Behr & Post, 1988)：面積模式是屬於連續量的分割狀況，例如以矩形和圓形面積的分割來引入分數的概念；離散量模式是指可數的個數所成的分離量集合的分配狀況，例如以花片和古式積木等來呈現

分數概念；數線模式是以數線的模式來呈現，同時必須標示參考點的數字，可用來表示整數、分數及小數之間的關係。臺灣和芬蘭分數教材在呈現時，主要呈現的表徵形式為何？不同的分數概念是否著重的表徵形式不同？是否採用多重表徵來促進學生對於分數學習的理解？這些都值得進一步瞭解，因為表徵的形式是影響學生分數學習的關鍵之一。

### 三、數學教科書研究的重要性

在美國政府提出“*No Child Left Behind*”的政策，以及數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)1989年出版《*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*》一書後，數學教育界開始重視課程與學生數學學習結果之間關係的研究，以檢驗所提出的課程計畫或發展課程的有效性(Stein, et al., 2007)。其中，數學教科書的內容便是受到關注與檢驗的焦點之一，也使得國內外許多研究者投入數學教科書的分析和比較的研究：在臺灣，徐偉民和徐于婷(2009)、陳仁輝和楊德清(2010)、以及楊德清等人(2011)，都進行跨國性數學教科書的比較，透過內容分析的方法，來瞭解臺灣與其他國家教科書在不同數學主題上編排和呈現的異同；在國外，Zhu 和 Fan (2006)針對美國和大陸數學教科書的問題型態進行分析。Charalambous 等人 (2010)探討塞普勒斯、愛爾蘭、臺灣三個國家數學教科書的分數加減內容的特色。Son 和 Senk (2010)針對美國和韓國數學教科書分數乘除的內容進行分析。這些跨國性教科書內容的比較，都是希望藉由比較和分析的結果中，瞭解到自己國家數學教科書的特色，以及對教師教學和學生學習可能產生的影響。因為教科書內容的差異，不僅會影響教師的教學實施，更會影響學生的學習結果(Tarr et al., 2008)。這就是為什麼教科書相關研究受到重視的主要原因。

一般而言，跨國性教科書的研究包含橫向、縱向和脈絡分析三種不同的取向：在橫向分析方面，教科書被視為一個整體，或教育體系的一部分來進行檢視，研究著重在一般教科書的特點，例如教科書外在的呈現方式(如教科書的名稱、數量、頁數等)和內容結構(如涵蓋的單元、單元順序等)等；在縱向分析方面，主要探討數學教科書如何處理單一數學主題，並把教科書視為知識建構的環境，包括傳達給學生的部分、學生的回應及連結三部分；在脈絡分析方面，則關注師生於數學活動時使用教科書的情形，並將教科書視為是在更廣泛的脈絡下，包括是在歷史發展、文化形成、特定目的和特別意圖下所形成的產物(Charalambous et al., 2010)。由於脈絡分析關注的是教科書實施的情形，以及關注教科書作者和出版者的主觀意圖。這部分屬於教室內數學教科書使用或實施的情形，所以大多數進行教科書分析的研究者，並未將脈絡分析納入研究中(如

## 專論

陳仁輝和楊德清，2010；Charalambous et al., 2010; Zhu & Fan, 2006)，而本研究亦並未探討教室內教科書實施的議題，因此將結合橫向與縱向兩個分析的面向，來分析臺灣和芬蘭數學教科書中的異同。教科書橫向和縱向分析的架構如表 1。

表 1 數學教科書的分析架構

教科書橫向分析		
背景資料 1.名稱 2.書籍數量 3.頁數(數目和密度) 4.作者和諮詢委員的介紹 5.出版社和出版年份 6.相關材料(如教學指引，教具等資源)	整體結構 1.單元數量及每一單元平均的頁數 2.單元結構 3.涵蓋的主題 4.主題的順序	
教科書縱向分析		
傳達給學生的部分	學生的回應	連結
數學內容 1.特定主題的結構等(如分數意義包括部分/整體、除的意涵、比、商、測量等) 2.定義，規則，公設 3.插圖，表徵(如無關的、與內容相關但與數學無關、與數學有關的)	1.潛在的認知需求(如記憶，程序，連結，程序但沒有連接，解題) 2.回應的方式(如只有答案，數學列式和答案、解釋，推理)	1.與課程標準(綱要)連結 2.與課堂教學/教科書連結 3.與校外情境連結
數學練習 1.例題 2.思考模式		
態度 1.公平 2.對數學的觀點		

資料來源：“A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries”, by Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V., 2010. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), p.123.

由國內外數學教科書的研究中，發現部分研究者關注於數學概念編排的分析，像是教材內容與課程教學目標的契合度、教材內容比重、概念編排順序等(陳梅生、吳德邦，1986；徐偉民、徐于婷，2009；楊德清等人，2011)；部分研究者則關注教科書內容的呈現方式，像是問題呈現方式、表徵形式、知識屬性、難易程度等(吳麗玲、楊德清，2007；陳仁輝、楊德清，2010；Charalambous et

al., 2010; Zhu & Fan, 2006)。可見在數學教科書內容分析的研究上，不僅概念的編排受到研究者的關注，其內容及問題的呈現方式亦是受到關注的焦點。而且在過去針對分數主題進行的研究上，也都以數學問題作為主要的分析單位：例如比較不同國家或版本數學教科書中分數問題的呈現方式(真實情境、虛擬和無情境)和知識屬性(概念性或程序性問題)(吳麗玲、楊德清，2007)；或是探討在不同分數主題中，不同分數問題採用的情境(連續量或離散量)和呈現的表徵模式(面積量、長度量)(蔡麗蓉，2003)，或是分析問題中是否提供不同表徵之間的連結(Charalambous et al., 2010)，或以何種呈現方式來促進學生對於概念的理解與運算的流暢等(Son & Senk, 2010)。過去分數教材的相關研究，將作為本研究在決定分析單位和分析類目時的參考。

## 參、研究方法

### 一、內容分析法

本研究採用內容分析法(content analysis)。王文科(2002)指出內容分析亦稱資訊分析或文獻分析，在許多研究領域中，常需要透過文獻的分析來獲得完整的資訊。因此，內容分析便常應用於文件分析的研究中。美國國家研究協會(National Research Council, 2004)也提出課程評鑑和比較的架構，指出若是要針對教科書的內容進行分析，建議採用內容分析的方法。這是本研究之所以選擇內容分析為研究方法的主要原因。早期的內容分析法是對文件資料的內容作客觀而有系統的量化，但此定義在今日已經顯得範圍過於狹窄。因此歐用生(1994)認為內容分析法為透過量化的技巧以及質的分析，採客觀與系統的態度，進行文件內容的研究及分析，藉以推論產生該文件內容之環境背景和意義。本研究採用定量分析，對研究對象分析所含類別與項目，再輔以定質分析，探討臺灣與芬蘭國小數學教科書之分數教材內容呈現的異同。

### 二、分析單位與類目

內容分析法的分析單位是內容量化依循的分析標準(歐用生，2000)，研究者可依其研究目的及內容選擇合適單位。數學教科書內容分析多以單元、活動、頁、問題等作為單位。本研究若以單元作為分析單位，則因同時包含太多的主題、概念，不適宜做概念分析；若以活動為分析單位，則會有同樣的問題；以頁為分析單位，雖同一頁為相同主題和概念，但兩國教材中每頁的問題數量不同。為了更精確計數及突顯兩國教材內容份量的差異，本研究決定以「問題」為計數單位，作為內容量化的依據。

類目是內容分析的標準，類目建構即內容的系統化分類。在內容分析法研究中，類目的建構是最重要且最困難的一個步驟。類目的設計必須能反應研究問題與假設，還要符合互斥、窮盡及可靠三個原則。Berelson 將類目分為兩大類(王石番，1996)：「說什麼」類目("what is said" categories)，用以測量內容的

實質部分，包括主題、方向、特徵、主角、權威、來源、出處、目標、標準、方向及價值等十類；「如何說」類目(“how it is said” categories)：用以測量內容的形式，包括傳播的形式、敘述的形式、感情的強度、策略等四類。本研究旨在分析臺灣與芬蘭數學教科書分數教材各年段及不同分數主題所佔的比重，亦即內容分析法中的「說什麼」類目的價值類目；分析數學教科書分數教材版面編排、概念呈現及問題呈現的方式，是指內容分析法中「如何說」類目的敘述形式類目及策略類目。

### (一)價值類目 (value category)

價值泛指一切事物所具有的意義或功用，內容分析時價值類目是假定人們所需要或所要得到的是什麼。本研究之價值類目，透過分析比較臺灣與芬蘭兩國分數教學目標、分數的多重意義、參考吳麗玲、楊德清(2007)與蔡麗蓉(2003)對分數教材的分析類目，並針對兩國教科書的初步探究，統整修改成以分數的基本概念和分數的加減乘除運算為主，比較兩國分數教材在各個主題上所佔的比重，以及概念編排脈絡的差異。

### (二)敘述形式類目 (form of statement category)

用以分析教材呈現之數學內容，傾向以何種形式呈現。本研究之敘述形式類目是指問題的呈現形式，採用 Zhu 與 Fan (2006)研究中對問題表徵的分類，將問題之表徵形式分為數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態等四種。數學型態是指問題的主軸只包含數學符號的表徵；文字型態為問題的主軸全為文字敘述；視覺型態為問題的主軸簡明地由插圖、圖像、圖表、曲線圖、表、圖示、地圖等來表徵；聯合型態則是問題的主軸呈現出兩種或三種之上述型態。

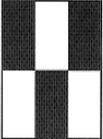
### (三)策略類目 (device category)

在大眾傳播的領域中，傳播者所使用的技巧，或傳播過程中所運用的修辭方法，就是策略類目；而在教育領域中，則是指教材內容使用何種方式引導學生學習數學知識。因此，本研究之策略類目是指教材問題的知識屬性。問題的知識屬性類目主要依據 NAEP (National Assessment of Educational Progress)將數學能力分為概念性知識的理解、程序性的知識、解題。加上 Hiebert 等人(2003)的研究將數學問題描述方式分為使用程序(using procedures)、描述概念(stating concepts)、進行連結(making connections)三種。再參考吳麗玲和楊德清(2007)的分類，最後本研究將問題的知識屬性分成程序性知識、概念性知識及連結性知識三類：概念性知識是指問題目的在於讓學生能透過操作、模型、圖形、符號等方式進行知識間的相互連結，獲得某一概念者，或使用非正式策略解題、估算等方式來理解數學原理，並能在原理間做連結、比較、以及整合應用；程序性知識是指問題目的在於讓學生透過程序性教學、計算，獲得概念知識，或利用概念進程序計算、解題，同時能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確；連結性知識是指問題知識的主軸，同時涵蓋概念性知識與程序性知識，

或同時兼用概念性知識與程序性知識來進行解題。

由上述可知，本研究分析類目的發展，是透過分數相關研究文獻之探討，並根據 Charalambous 等人(2010)提到的數學教科書分析架構、Zhu 與 Fan(2006)對問題表徵形式的分類、國內數學教科書分數教材相關研究(吳麗玲、楊德清，2007；蔡麗蓉，2003)、及兩國數學課程綱要中分數教學目標，最後由研究者依研究目的修改發展出「小學分數教材內容分析類目表」，如表 2。各類目範例如下：

表 2 小學分數教材內容分析類目表

主類目	次類目	說明及範例
分數主題類目	分數基本定義	包括等分概念、單位分數、分數的命名與符號、真/假/帶分數、假分數帶分數的轉換、分數概念(包含部分/整體、子集合/集合、整數相除、測量的意涵、數線上的一點)、分數表徵等。
	分數的加減	包括整數與分數加減運算、同分母及異分母的分數加減運算等。
	等值分數	包括約分、擴分、通分、最簡分數等。
	分數乘法	包括分數×整數、整數×分數、分數×分數等。
	分數除法	包括分數÷整數、整數÷分數、分數÷分數等。
	分數四則混合運算	同時包括分數加減及乘除混合計算等概念等。
問題表徵形式類目	數學型態	<p>Arrange the fractions 1. in ascending order.</p> <p>a) <math>\frac{2}{5}</math>    <math>1\frac{1}{5}</math>    2    <math>\frac{4}{5}</math></p> <p><input type="text"/> &lt; <input type="text"/> &lt; <input type="text"/> &lt; <input type="text"/></p> <p>Laskutaito 4B in English, p.34</p>
	文字型態	<p>同樣的蔥油餅，小可吃了 <math>\frac{2}{3}</math> 張，東東吃了 <math>\frac{5}{6}</math> 張，誰吃的比較多？</p> <p>國民小學數學第 8 冊，77 頁</p>
視覺型態	<p>5. Work out what fraction of the shape is shaded.</p> <p>a) </p> <p>b) </p> <p>c) </p> <p>d) </p> <p>Laskutaito 4B in English, p.43</p>	

1 將7公尺長的繩子平分成2段，每段長幾公尺？

聯合型態

$7 \div 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

平分可用除法來算。

國民小學數學第 8 冊，82 頁

Which mixed number or whole number is represented by these parts?

概念性知識

9. a) b) c) d)

Laskutaito 5B in English, p.6

問題知識屬性類目

程序性知識

1  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times \square}{5 \times \square} =$

國民小學數學第 10 冊，33 頁

How much fuel is left in the tank?

5. The tank holds 40 litres.

連結性知識

a) left \_\_\_\_\_ ↓

Laskutaito 4B in English, p.41

### 三、研究對象

#### (一)臺灣部編版數學

臺灣部編版數學教科書是國立教育研究院籌備處主編，依據九年一貫數學領域課程綱要的能力指標及分年細目進行編輯，並參考美國、新加坡等國家 2000 年以後之課程標準或核心教材(陳仁輝、楊德清，2010)，耗時兩年多研發

完成，是唯一經過試教過程的數學教科書。該編輯委員並期待「部編版」能成爲民間各版本的「標竿」，引導所有版本提升品質(楊明憬，2008)。而且在內容難易度上，相較於之前民間版本的內容，整體課程深度約提昇了一年半到一年半的程度，但和美國相近(陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005)。

教材編輯理念著重基本概念的理解以及不同數學主題間概念的連結，因此整套書的設計是以循序漸進方式進行，一方面照顧到學生階段性的智能發展，另一方面用以訓練並養成學生清晰邏輯思維方式。強調從數學的知識觀點出發，以現實生活題材爲中心，提供適合學生們瞭解的數學概念及數學方法，營造學習情境促進他們發表、溝通、分析推理，進而提升數學能力並培養欣賞數學的能力。也強調應透過實踐活動，體驗數學與生活的連結(陳仁輝、楊德清，2010)。部編版國小數學教科書每年級有上下兩冊，共 12 冊。本研究使用版本除 6 下爲 2011 年出版，其餘爲 2010 年出版。部編版數學從二下至六下均有分數相關單元。

## (二)芬蘭 WSOY 版 Laskutaito in English

芬蘭 WSOY 出版社所發行 Laskutaito 系列教科書，編寫歷史已有 18 年，是目前芬蘭中、小學數學教科書市場使用比例最高的系列(陳之華，2007)。其教材除了發展學生基礎的演算能力，也著重發展數學思維、解題能力及創造力，編排內容也強調計算機和電腦的使用能力。爲了提升學生生活智能，常在單元活動中安排人文情懷、本土文化、國際議題等多元的主題式活動，能讓學生瞭解數學學習與生活情境息息相關(董修齊，2010)。此外，這系列的教科書包涵有教師手冊、輔助教材和專門給資優學生較多樣且具挑戰性的習作本，以及爲了學習較緩慢學生所編印的特別輔助教材。WSOY 版 Laskutaito in English 是根據 2004 年芬蘭國家核心課程的數學課程內涵所編寫。WSOY 版數學教科書每年級都有 A、B 兩冊，共十二冊。本研究使用的 WSOY 版除了 5A、6A 爲 2010 出版，其他爲 2009 出版。WSOY 版教科書分數教材僅出現在 3B、4B、5B、6B 等四冊。

## 四、信度分析的過程與結果

本研究採用「評分者一致性」作爲信度的檢驗方式，評分員對內容單位分派各類目的同意度與一致性越高，即表示該研究的信度越高。以下說明評分者的組成與信度分析的步驟：

### (一)評分員的選定

本研究邀請兩位評分員進行信度檢驗，此二位評分員皆國小教師且目前是數學教育研究所研究生，其研究領域均以教科書分析爲主，且已具有教科書分析的經驗。連同本研究的第二作者共三人，共同進行評分者一致性的檢定。

### (二)信度分析的步驟

1. 選取樣本：從臺灣與芬蘭小學 3 至 6 年級教材中，選出分數份量較多的五年級的分數教材(臺灣五上和五下兩冊，芬蘭 5B 一冊)，進行試行歸類分析。

2. 說明：將類目表及定義發給每位評分員閱讀，並說明歸類原則。

3. 歸類：由三位評分員獨立進行類目歸類，並針對歸類結果不一致處進行討論與確認。結果發現，在價值類目(分數主題)及敘述形式類目(問題表徵形式)歸類時，三位評分員均為一致，僅策略類目(問題的知識屬性)歸類時會有不一致情況發生。因此，本研究僅對策略類目的問題知識屬性進行歸類分析，並建立本研究的相互同意值與信度。

4. 信度計算：本研究採用評分員信度法檢視評分者間同意度，並採用信度簡易公式(歐用生，1991)：先計算評分者間的相互同意值( $P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$ ，M 表示兩人共同同意項目數，N1、N2 為每位評分員同意的項目數)，再求平均相互同意值( $P = \frac{\sum P_i}{N}$ ，N 表示評分者兩兩相互比較的總次數)，最後歸類之結果依伯格納簡易信度公式求出信度( $R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$ ，n 為評分者總人數)。本研究評分員相互同意值與整體信度值如表 3。

表 3 三位評分員相互同意值與信度一覽表

評分員	甲	乙
乙	0.891	
丙	0.823	0.823
平均相互同意值 $P = 0.85$ ，信度 $R = 0.94$		

## 五、效度考驗的過程

本研究效度考驗的過程，首先根據理論和兩國數學課程綱要的內容，來形成包含問題所屬的分數主題(來自課程綱要)、表徵形式(來自 Zhu 與 Fan(2006)的研究)、知識屬性(來自 Hiebert 等人(2003)、吳麗玲和楊德清(2007)的研究)三大主類目與相關的次類目。之後，再邀請兩位同樣具有教科書分析經驗的研究生進行歸類分析，針對分析過程中遇到的判斷和歸類問題，進行討論、重新檢視其定義並形成共識，使每個數學問題都能明確地歸類到所屬的類目中，取得良好的信度值後進行正式的分析。在整個類目形成以及初步分析和討論的過程中，都不斷和一位具有數學教育專長的大學教授進行討論與確認，希望藉由專家的檢視來提升分析結果的有效性。意即，本研究的類目形成和分析，除了具有理論的依據、試行分析、修正與確認的步驟外，也具有專家意見的討論與審核，使本研究分析的結果更具有可靠性。

## 六、資料處理與分析

在資料處理方面，本研究的分析範圍以課本內容為主，以「問題」為計數單位，並根據小學分數教材內容分析類目表(表 2)做為分析類目，將每個問題分類並登錄於其隸屬的類目中。每個問題在進行某一主類目的歸類時，只會登錄

在該主類目的某一個次類目中，不會同時劃入兩個次類目。例如，在進行問題敘述形式類目分析時，同一問題不會同屬於數學型態和文字型態兩種類目。

在資料分析方面，由於本研究包含三個主類目，所以每個數學問題都進行三次的歸類：一次針對分數主題的類目進行歸類與統計，以了解兩國分數主題分佈的異同；一次進行問題敘述形式的類目進行歸類與統計，以了解兩國分數問題呈現方式上的異同；一次針對問題知識屬性的類目進行歸類與統計，以了解兩國分數問題學習的焦點。除了上述「量」的資料分析外，也針對分數主題和問題的編排、呈現的方式(例如：分數概念呈現的順序)，輔以質性的分析，以更了解兩國在分數教材內容呈現上的特色。

## 肆、研究結果與討論

### 一、臺灣芬蘭分數主題呈現之比較

臺灣與芬蘭各年級分數問題在分數主題類目的分佈數量與百分比，如表 4 和表 5。從分數問題的總數量來看，芬蘭共有 1229 題，幾乎是臺灣 623 題的兩倍，而且只分佈在 3B、4B、5B、6B 等 4 冊中，平均每冊有 307.25 題。而臺灣分數問題則出現在二下至六下等 9 冊中，平均每冊 69.2 題。不過臺灣從二年級(二下)開始介紹分數，比芬蘭從三年級(3B)開始介紹早了一年。

從年級來看分數問題的分佈情況，則發現兩國都有隨著年級的增加，而分數問題所佔比重增加的趨勢。臺灣五年級的分數問題佔的比例最高，芬蘭則是六年級，臺灣有超過 70% 的分數問題出現在四至六年級，芬蘭在同年段則有超過 80% 的分數問題，可見分數都是兩國國小最後階段最重要的學習主題之一。

再從分數的主題來看，發現兩國分數問題數最多的主題均為「分數基本定義」，臺灣有 237 題(38%)，芬蘭有 568 題(46.2%)，可見兩國均相當重視「分數基本定義」，且芬蘭比臺灣重視程度更高，因為其題數幾乎佔全部問題的一半，甚至到六年級還有 109 題是屬於分數基本定義的問題，而臺灣到了六年級則不再出現此類別的問題。在最少分數主題上，臺灣為「等值分數」有 58 題(9.3%)，芬蘭為「分數四則混合運算」有 11 題(0.9%)。若再進一步結合分數主題出現的年級來看，發現除了等值分數芬蘭比臺灣早一年出現、分數除法兩國均從五年級出現，其餘概念臺灣都比芬蘭提早一年出現。由此來看，臺灣分數教材內容明顯地比芬蘭提早一年。

從各個主題在不同年級的分佈來看，都可以發現兩國均是採螺旋式的方式來呈現分數教材，而且芬蘭的螺旋式比臺灣更徹底，因為每個主題出現後，一直到六年級都還會出現，而臺灣部分主題則未有此情況(如分數基本定義)。從不同分數主題所佔的比例來看，臺灣較重視分數基本意義和分數除法，其餘主題則為平均分配。芬蘭則重視分數基本定義和分數加減，各主題的分佈也不如臺灣平均。

表 4 臺灣各年級分數問題在分數主題類目分佈統計表

年級	分數主題之次類目						總計
	分數基本定義	分數的加減	等值分數	分數乘法	分數除法	分數四則混合運算	
二	35	0	0	0	0	0	35(5.6%)
三	92	20	0	0	0	0	112(18%)
四	83	33	15	9	0	2	142(22.8%)
五	27	25	43	58	22	11	186(29.9%)
六	0	0	0	4	94	50	148(23.8%)
總計	237 (38%)	78 (12.5%)	58 (9.3%)	71 (11.4%)	116 (18.6%)	63 (10.1%)	623

表 5 芬蘭各年級分數問題在分數主題類目分佈統計表

年級	分數主題之次類目						總計
	分數基本定義	分數的加減	等值分數	分數乘法	分數除法	分數四則混合運算	
二	0	0	0	0	0	0	0(0%)
三	191	0	12	0	0	0	203(16.5%)
四	177	102	0	0	0	0	279(22.7%)
五	91	109	49	52	47	10	358(29.1%)
六	109	79	83	42	75	1	389(31.7%)
總計	568 (46.2%)	290 (23.6%)	144 (11.7%)	94 (7.6%)	122 (10%)	11 (0.9%)	1229

## 二、臺灣芬蘭分數概念編排順序之比較

本研究雖然將分數的主題分為分數的基本定義等六項，但由於概念之間的相關性(如分數的加減涉及等值分數的概念，分數除法涉及乘法的運算規則)，以及分數的四則混合運算，雖以分數為內容，但其焦點在於加、減、乘、除四種不同運算的組合與規則的運用。因此，以下僅就「分數基本定義」、「分數的加減與等值分數」與「分數乘法與除法」三個主要概念進行分析比較。

### (一)分數基本定義

分數基本定義包括等分概念、單位分數、分數的命名與符號、真/假/帶分

## 臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析

數、假分數帶分數的轉換、分數概念(部分/整體、子集合/集合、整數相除、測量的意涵、數線上的一點)、分數表徵等內容。臺灣與芬蘭二至六年級教材中，涉及分數基本定義的內容和呈現的順序如圖 1 所示。

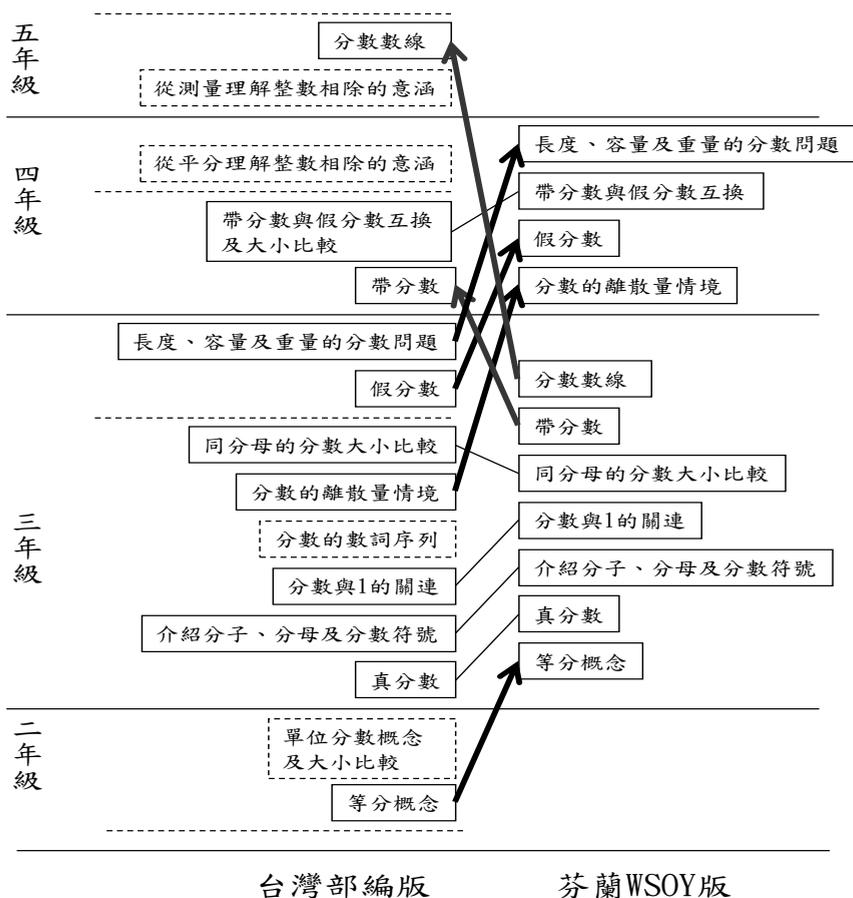


圖 1 臺灣與芬蘭分數基本定義概念的內容和呈現順序比較圖

註一：臺灣虛線下方代表上學期，上方則代表下學期。

註二：右上箭頭代表臺灣概念呈現早於芬蘭，左上箭頭則反之，線段則表示兩國相同。

註三：實線方格代表兩國均有的概念，虛線方格則代表該國有而另一國沒有的概念。

分數基本定義雖然都是兩國分數教材中所佔比例最高的主題概念(臺灣 38%，芬蘭 47.2%)，但出現的時間有些不同：臺灣在等分概念、分數離散量情境、假分數、長度、容量及重量的分數問題、及從測量理解整數相除的意涵等，都比芬蘭提早約一年的時間出現；而芬蘭則在帶分數和分數數線兩個概念上比臺灣早出現，尤其分數數線在三下就出現，在剛開始介紹分數時，便引入分數是數線上的一點(圖 2)。而臺灣則是到五上才出現，透過數線上分數與小數的位置，將分數與小數連結在一起(圖 3)。而兩國在真分數、介紹分子與分母及分數符號、分數與 1 的關連、同分母分數大小比較、帶分數與假分數互換等概念，出現的時間相同。此外，臺灣分數教材中有呈現單位分數、分數數詞序列、從平分和測量理解整數相除的意涵等概念，但芬蘭分數較中則未出現這四個分數相關的概念。由此看來，臺灣分數教材中呈現較多分數不同的意義(如除法的意涵)。

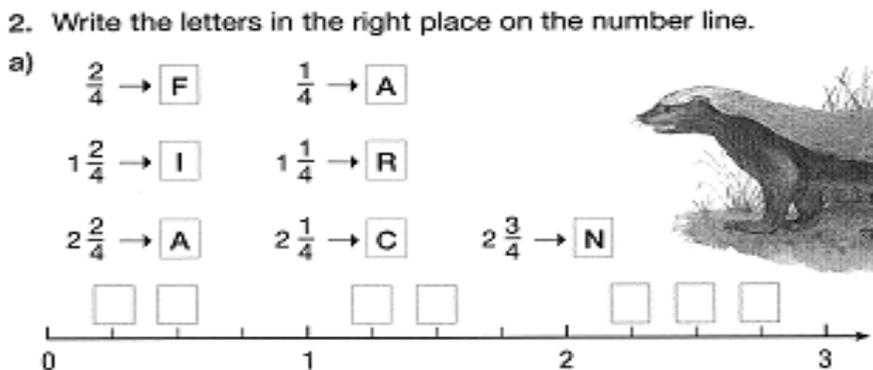


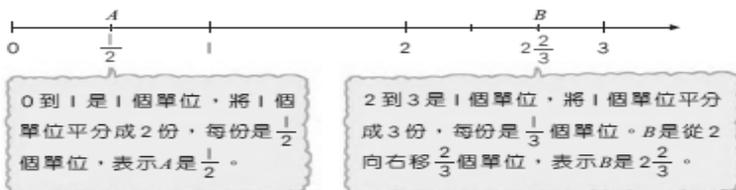
圖 2 芬蘭分數數線示例圖

資料來源：Laskutaito 3B in English (p.34), by Saarelainen, 2009a, Helsinki: WSOY

# 7-6

## 數線上的分數和小數

數線不只可以標示整數，也可以標示分數。例如：



練習 在  中填入恰當的分數。

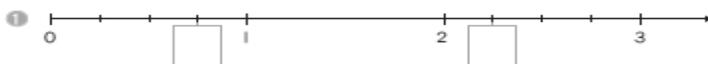


圖 3 臺灣分數數線示例圖

資料來源：國小數學 5 上(85 頁)，國家教育研究院籌備處主編，2010b。

臺北：國家教育研究院籌備處。

臺灣和芬蘭在分數基本定義主題中差異最大的是對單位分數、真分數、假分數、及帶分數的編排。臺灣從單位分數開始，接著真分數，之後假分數，最後才是帶分數；而芬蘭直接從真分數開始，接著帶分數，最後才是假分數。也因如此，兩國在帶分數與假分數互換方式，編排上有明顯的不同：臺灣先介紹假分數，再介紹帶分數，之後是假分數與帶分數的互換，來連結帶分數與假分數的關連；芬蘭則是先有帶分數，之後才透過帶分數轉換成假分數，引入假分數的概念，然後才是假分數與帶分數的互換。由此可見，臺灣將假分數視為真分數的延伸，而芬蘭僅將假分數視為帶分數的另一種表示方式。

### (二)分數的加減與等值分數

分數的加減包括整數與分數加減運算、同分母及異分母的分數加減運算等內容，而等值分數則包括約分、擴分、通分、最簡分數等內容，臺灣與芬蘭分數的加減與等值分數概念的內涵和呈現順序如圖 4。

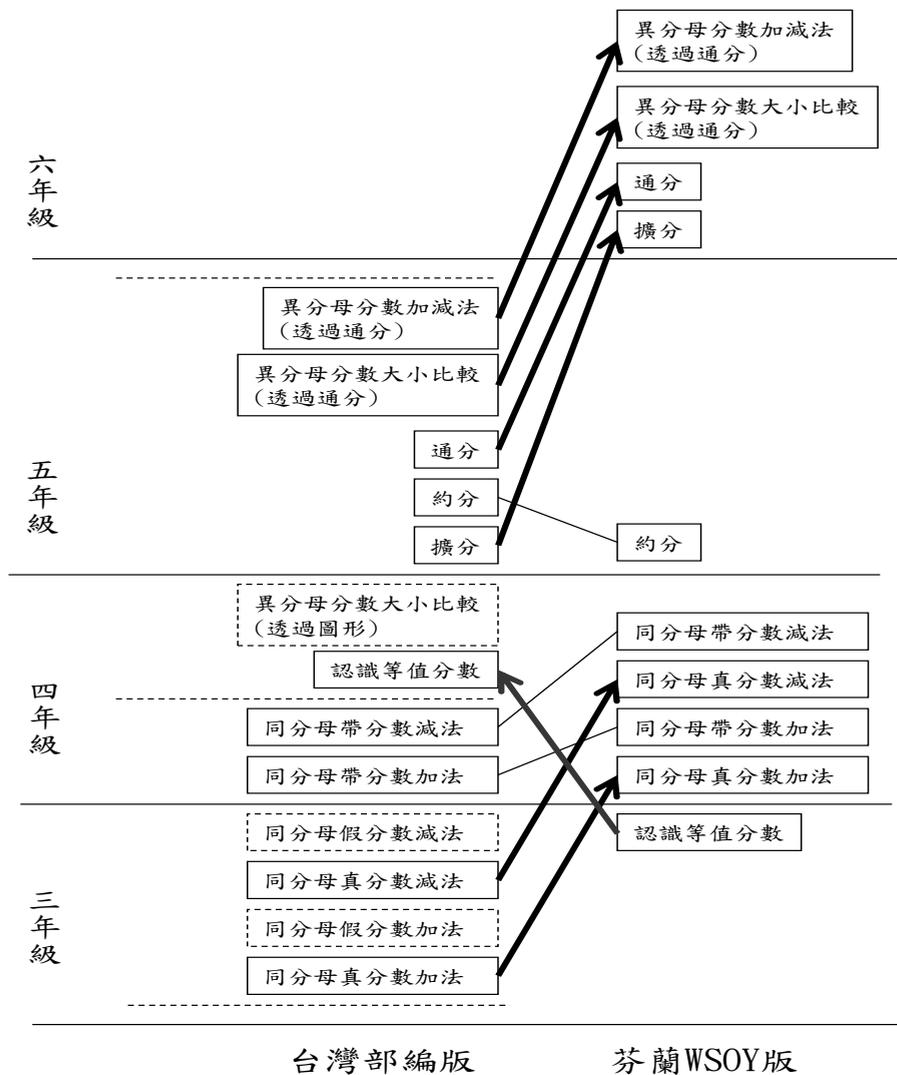


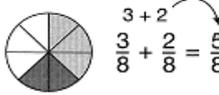
圖 4 臺灣與芬蘭分數的加減及等值分數概念的內容和呈現順序比較圖

註：相關說明和圖 1 相同。

兩國在呈現分數加減法時，都是先呈現同分母的加法，再呈現同分母的減法。但不同之處有二：一是臺灣在處理同分母加減時都強調了單位分數的合成與分解，例如讓學生了解  $2/6$  是 2 個  $1/6$ ， $3/6$  是 3 個  $1/6$ ，因此 2 個  $1/6$  加上 3 個  $1/6$  是 5 個  $1/6$ ，所以  $2/6+3/6=5/6$ 。而芬蘭則是透過圖示來說明運算的規則為「分子相加，而分母不變」(圖 5)；二是臺灣在呈現分數加減概念時，將真分

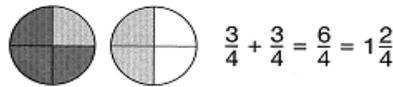
數和假分數視為類似概念，而呈現在同一冊中，帶分數到下一冊才呈現。但芬蘭則是將真分數與帶分數是為類似概念，而且沒有假分數加減的內容。兩國分數加減法概念呈現的順序相似，但臺灣大都提早一年出現，僅在同分母帶分數的加減及約分兩個概念，出現的時間相同。但臺灣先呈現擴分，然後再呈現約分，而芬蘭則是相反，且在呈現擴分和約分概念時，會在分數的左上方和右上方，寫出要約分所乘或擴分所除的數字(圖 6)，而臺灣則是在分子分母處寫出同乘(除)的數字。芬蘭唯一比臺灣早一年呈現的是等值分數，在三年級引入分數概念時，即透過分數條來呈現等值分數的概念，將等值分數視為基本概念的一部份，而臺灣則是在完成同分母加減法後才呈現，是將等值分數視為異分母加減法的前置概念。

**Adding fractions with common denominators**



$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

Add the numerators. The common denominator becomes the denominator.



$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$

If the numerator becomes greater than the denominator, the fraction is converted to a mixed number.

圖 5 芬蘭同分母加法概念呈現示例圖

資料來源：Laskutaito 4B in English (p.38), by Saarelainen, 2009b, Helsinki: WSOY

A fraction is **reduced** by dividing its numerator and denominator by the same number. The number used to reduce the fraction is placed above and to the right of the fraction.

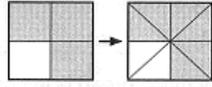
**Example 1.**

$\frac{6}{8} \overset{2}{=} \frac{3}{4}$  or  $\frac{3}{8} \overset{2}{=} \frac{3}{4}$

A fraction is **extended** by multiplying its numerator and denominator by the same number. The number being used to extend the fraction is placed above and to the left of the fraction.

**Example 2.**

$\overset{2}{2} \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$



**Reducing and extending does not change the value of the fraction.**

圖 6 芬蘭約分擴分概念呈現方式示例圖

資料來源：Laskutaito 6B in English (p.6), by Saarelainen, 2009d, Helsinki: WSOY

### (三)分數乘法與分數除法

分數乘法包括分數乘以整數、整數乘以分數、分數乘以分數，而分數除法包括分數除以整數、整數除以分數、分數除以分數等，臺灣與芬蘭分數乘法與分數除法概念的內容和呈現順序如圖 7。從圖 7 來看，臺灣在分數乘法的部分都提早芬蘭一年的時間，而且呈現的順序有所不同。在分數除法的部分，兩國不但出現的年級相同，呈現的順序也相同。

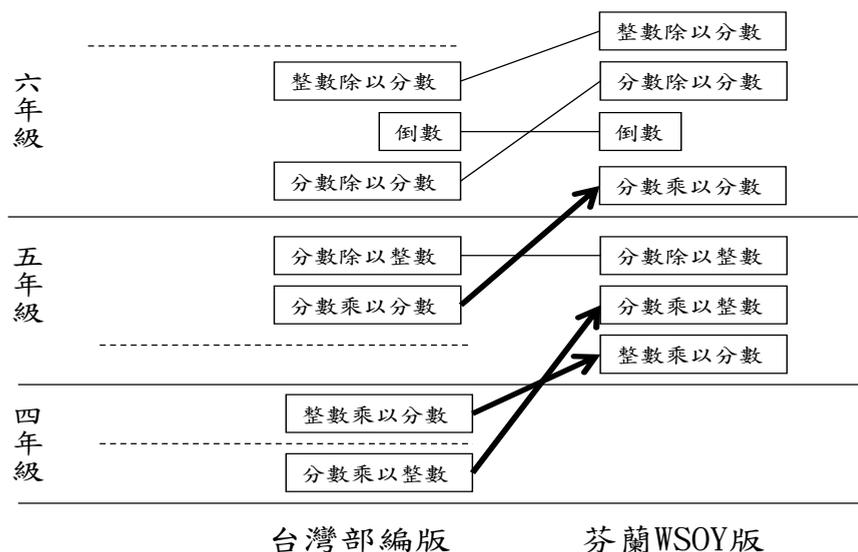


圖 7 臺灣與芬蘭分數乘除概念的內容和呈現順序比較圖

註：相關說明和圖 1 相同。

如分數乘法呈現的順序上，臺灣從分數乘以整數開始，透過分數的整數倍(如  $1/4 \times 3 = 1/4 + 1/4 + 1/4$ )來引入分數乘法的學習。之後進入整數乘以分數的概念，透過單位分數的概念(如  $2/5$  是指平分成 5 份中的其中 2 份)，來引入整數「先除以分母再乘以分子」的運算規則，最後才進入分數乘以分數。而芬蘭卻是先呈現整數乘以分數的概念，但其代表的意義和臺灣相同，都從分數的整數倍開始引入，只是其乘法算式的意義與臺灣不同，「 $3 \times 1/4$ 」是指「3 個  $1/4$ 」。芬蘭之後呈現分數乘以整數，但是將其概念視為和整數乘以分數相同，告知學生使用乘法交換律來轉換成整數乘以分數(圖 8)，再來進行解題，並未使用單位分數的意義來進行解題與導出運算規則，這是兩國非常不同之處。

至於在分數除法方面，特別是分數除以分數部分，均以「分數乘以倒數」的算則為教學重點，但在呈現臺灣先從同分母分數除法開始，從單位分數和除法的意義中，來引導學生了解，之後進入異分母的除法，從通分開始，逐漸進入「乘以其倒數」的算則。在整個分數除法呈現過程中，臺灣不採告知算則的方式，而是逐漸從學生過去所學的相關概念，來引導學生理解，並逐漸引出算則。而芬蘭則是透過重點提示的方式來直接介紹「倒數」的概念，並且說明在分數除以分數時，可以直接將除數顛倒，而採用分數乘以分數的方式來進行計算。這樣的處理方式和臺灣有很大的不同(圖 9)。

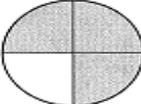
<p>Evaluate.</p> <p>70. a) </p> <p><math>3 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}</math></p>	<p>Use the commutative law of multiplication.</p> <p>78. a) <math>\frac{2}{3} \cdot 4</math>                      79. a) <math>\frac{5}{6} \cdot 9</math></p> <p>      b) <math>\frac{3}{4} \cdot 8</math>                         b) <math>\frac{3}{10} \cdot 15</math></p>
---	--

圖 8 芬蘭整數乘以分數、分數乘以整數示例圖

資料來源：Laskutaito 6B in English (p.14, 15), by Saarelainen, 2009, Helsinki: WSOY

A number is **divided** by a fraction by **multiplying** that number by the **reciprocal** of the fraction.

The **reciprocal** of a fraction can be obtained by changing the places of the numerator and the denominator:

**Example 1.**

number	reciprocal
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1} = 2$
$4 = \frac{4}{1}$	$\frac{1}{4}$

**Convert the division problem to a multiplication problem.**

**Example 2.**

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

**Reduction can only be done after converting to a multiplication problem.**

**Example 3.**

$$\frac{7}{10} : \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{1} = \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 1} = \frac{7 \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

圖 9 芬蘭分數除以分數示例圖

資料來源：Laskutaito 6B in English (p.20), by Saarelainen, 2009d, Helsinki: WSOY

### 三、問題呈現方式之比較

#### (一)問題的表徵形式

從表 6 和表 7 可知，臺灣部編版數學教科書 623 題分數問題中，數學型態有 275 題(44.1%)，文字型態 126 題(20.2%)，視覺型態 102 題(16.4%)，聯合型

態有 120 題(19.3%)；芬蘭 WOSY 版數學教科書 1229 題分數問題中，數學型態有 693 題(56.4%)，文字型態 179 題(14.6%)，視覺型態 274 題(22.3%)，聯合型態有 83 題(6.8%)。兩國明顯地偏重以數學型態來呈現分數問題，芬蘭更超過一半的分數問題以數學符號的表徵來呈現。

至於其他三種表徵型態的分佈，從表 6 和表 7 中可以發現，臺灣在三種表徵形式的分佈較為平均，而芬蘭則明顯地較少採用聯合型態來呈現分數問題。在從不同形式在各年級的分佈情況來看，兩國在數學型態和文字型態上，大致上都有隨著年級的增加而逐漸增加的趨勢，而在視覺型態上，則是隨著年級的增加而逐漸的減少。若進一步結合分數的主題與表徵形式來看(表 8)，則發現兩國在分數的基本意義主題上，以視覺型態呈現的比例居多(臺灣 99/623，約佔 16%，芬蘭 243/1229，佔 20%)，其餘的分數主題均以數學型態居多。可見在分數問題呈現的形式上，台灣和芬蘭都有隨著年級逐漸抽象化的趨勢，年級愈高，數學型態和文字型態呈現的比例愈高；而在分數主題內容的呈現上，也考量了分數主題的特性，分數的基本定義多以視覺型態來呈現，分數的運算多以數學型態來呈現。

表 6 臺灣部編版問題的表徵形式在各年級所佔問題數統計表

年級		二	三	四	五	六	總計
問題表徵形式	數學型態	0	18	61	89	107	275(44.1%)
	文字型態	1	5	23	59	38	126(20.2%)
	視覺型態	23	60	13	5	1	102(16.4%)
	聯合型態	11	29	43	33	4	120(19.3%)
	總計	35	112	140	186	150	623

表 7 芬蘭 WOSY 版問題的表徵形式在各年級所佔問題數統計表

年級		二	三	四	五	六	總計
問題表徵形式	數學型態	0	24	162	238	269	693(56.4%)
	文字型態	0	12	15	67	85	179(14.6%)
	視覺型態	0	129	77	49	19	274(22.3%)
	聯合型態	0	38	25	4	16	83(6.8%)
	總計	0	203	279	358	389	1229

表 8 臺灣、芬蘭分數問題的表徵形式在不同分數主題分布的情形

類別	數學型態	文字型態	視覺型態	聯合型態	總計	
分數基本定義	臺灣	37	42	99	59	235
	芬蘭	180	86	243	71	580
分數的加減	臺灣	53	11	0	14	78
	芬蘭	244	38	0	8	290
等值分數	臺灣	30	9	2	17	58
	芬蘭	93	23	12	4	132
分數乘法	臺灣	37	17	0	17	71
	芬蘭	71	14	9	0	94
分數除法	臺灣	73	38	0	5	116
	芬蘭	97	15	10	0	122
分數四則混合運算	臺灣	45	9	1	8	63
	芬蘭	8	3	0	0	11
總計	臺灣	275	126	102	120	623
	芬蘭	693	179	274	83	1229

## (二)問題的知識屬性

從表 9 和表 10 可知，臺灣部編版數學教科書 623 題分數問題中，屬於概念性知識有 214 題(34.3%)，程序性知識 223 題(35.8%)，連結性知識有 186 題(29.9%)；芬蘭 WOSY 版數學教科書 1229 題分數問題中，屬於概念性知識有 360 題(29.3%)，程序性知識 627 題(51.0%)，連結性知識有 242 題(19.7%)。從兩國不同知識屬性所佔的比例來看，雖然都以程序性知識所佔的比例最高，但是臺灣在三種知識屬性的分佈較為平均，所佔的比例約在 30%~36%之間，而芬蘭則是明顯地偏重於程序性知識的部分，佔 51%，連結性的知識最少，約佔 20%。

表 9 臺灣部編版問題的知識屬性在各年級所佔問題數統計表

問題知識屬性	年段	二	三	四	五	六	總計
問題知識屬性	概念性知識	35	96	47	22	14	214(34.3%)
	程序性知識	0	16	54	88	65	223(35.8%)
	連結性知識	0	0	41	76	69	186(29.9%)
	總題數	35	112	142	186	148	623

表 10 芬蘭 WOSY 版數學教科書問題的知識屬性在各年級所佔問題數統計表

	年段	二	三	四	五	六	總計
問題 知識 屬性	概念性知識	0	203	76	47	34	360(29.3%)
	程序性知識	0	0	110	242	275	627(51%)
	連結性知識	0	0	93	69	80	242(19.7%)
	總題數	0	203	279	358	389	1229

若再從不同知識屬性在各年級分佈的情況來看，則發現兩國概念性知識有隨著年級增加而減少的趨勢，而程序性知識和連結性知識都有隨著年級增加而增加的趨勢。臺灣二、三年級的分數問題以概念性知識為主，四、五年級以程序性知識為主，六年級則以程序性和連結性知識為主；芬蘭三年級全部是概念性問題，四至六年級都以程序性知識為主。由此看來，兩國在分數教材呈現時，初期均以建立分數的概念為主，隨著年級的增加而逐漸加入強調計算的程序性知識，以及應用概念性或程序性分數知識進行解題的內容。不過整體來看，芬蘭的分數教材以強調程序性知識為主，而且四至六年級分數教材均以程序性知識佔多數。

#### 四、研究討論

美國國家數學建議小組(National Mathematics Advisory Panel, 2008)強調分數學習的重要，認為明確的分數概念和流暢的運算技巧，是代數學習的必要條件，而且研究上也發現學生在學習分數概念時會產生許多迷思概念(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩, 2009; Kennedy & Tipps, 2000)。因此，有必要針對影響學生學習最直接的分數教材進行分析，以了解對學生學習可能產生的影響。

從教科書中分數問題的數量來看，臺灣的分數問題數量只有芬蘭的一半，芬蘭在分數學習上提供了學生較多的學習機會。Törnroos(2004)指出，學生的學習機會是影響學生學習成就表現的重要因素之一。由此觀點來看，臺灣學生在分數學習的機會上不如芬蘭充足。不過，由於臺灣學生參加課後補習的情況普遍，所以無法完全以問題的數量來論斷對學生分數學習的影響。此外，芬蘭教科書中的問題數量眾多，以分數單元來說，平均每冊在分數單元中就有約 307 題(還不包含課本後的 Additional tasks 和 Homework)，數學課時是否讓學生練習所有的問題？教師如何使用教科書？目前研究尚未得知。因此，如要根據分數問題的數量來論斷兩國學生在分數主題的表現，宜謹慎與保留。

在分數概念的呈現上，雖然兩國在各主題概念呈現的順序相似(臺灣大都提早一年呈現)，但在分數基本意義的內涵，和分數除法的呈現方式上有較大的差

異。在分數基本概念中，包含了部分/整體關係、整數相除、運算子、數線上的一點、比/比值等不同的意義(呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩，2009；Dickson, et al., 1984; Kieren, 1993; Kennedy & Tipps, 2000)，但芬蘭分數教材中並未涉及到分數具有整數相除的意涵，而臺灣則從除法兩種不同的情境(平分和測量情境)來引入分數具有整數相除的意涵。此外，臺灣分數教材強調單位分數的概念作為分數運算的基礎，同時也因為單位分數的概念，所以將真分數和假分數視為都屬於單位分數的延伸，而將兩個概念放在同一年級中，但帶分數涉及整數和分數兩個概念，所以在下一個年級才出現(在加減運算時也是如此)。但芬蘭並未呈現單位分數的概念，且將帶分數視為是真分數概念的延伸，因此放在同一冊中，透過圖示搭配文字說明和算式來直接介紹帶分數。此外，芬蘭在分數數線和等值分數上，都在剛開始介紹分數概念時便呈現，視為是分數的基本概念，所以出現的時間比臺灣早。相同的分數概念卻有不同的定位和順序，對學生的分數學習有何影響，值得進一步探討。

而在分數的除法上，兩國雖然在呈現順序上很相似，但臺灣透過同分母的方式來引入，再透過單位分數和除法的意涵來讓學生了解同分母除法的運算。之後在逐漸進入異分母，透過通分與同分母除法的經驗，逐漸引入「顛倒相乘」的算則，在呈現的步驟上細膩且有層次。反觀芬蘭，在呈現分數除以分數時，直接「告知」學生運算的規則，之後讓學生運用此規則來進行解題，不像臺灣有層次且逐步的呈現。其實，直接告知或呈現運算的方法是芬蘭教科書的一大特色，無論是在帶分數出現的介紹、一開始分數除以整數的例題，都是採用直接定義或告知的方式來呈現，之後便呈現大量的練習。若以 Artzt 和 Armour-Thomas (2002)、Wiske (2005)等人對數學學習的觀點來看，則臺灣例題的呈現方式比較容易讓學生在學習過程中達到理解的目的。而芬蘭的呈現方式，則可能因為教師的差異而有很大的不同。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本研究以國際數學測驗表現傑出的臺灣與芬蘭國小數學教科書為對象，針對分數教材內容進行比較，探討兩國分數概念的編排和呈現上的異同。結果發現，在分數概念的呈現上，除了分數除法和等值分數外，其餘分數概念(分數基本定義、分數加減、乘法、四則運算等)臺灣都比芬蘭提早一年出現，而且臺灣分數基本意義中所涵蓋的意義較芬蘭多元，而芬蘭概念呈現的方式則較臺灣直接。在分數問題呈現的表徵上，兩國都以數學型態為主要的表徵型態，但臺灣在文字、視覺和聯合型態上則較為均衡，芬蘭則明顯的較忽略聯合表徵的型態。而在分數問題的知識屬性上，臺灣兼顧了概念性知識、程序性和連結性知識，

而芬蘭則明顯地以程序性知識為主，連結性知識較少。臺灣分數問題在知識屬性上的分佈，似乎和吳麗玲、楊德清(2007)的研究發現不同，這一方面是因為吳麗玲和楊德清(2007)以五六年級分數教材為分析對象，另一方面是因為該研究將應用解題也歸類到程序性知識中，所以才有所不同。結合分數概念的編排和呈現、問題的表徵和知識屬性三個面向來看，芬蘭的分數教材較聚焦在符號抽象與程序知識的運用，呈現的方式也較為直接，在分數問題的數量上幾乎是臺灣的兩倍。意即，從分數教材上來看，芬蘭學生有較多分數符號運用與運算程序熟練的機會。不過，由於臺灣家長重視學生的數學學習表現，以及盛行課後補習的文化，所以學生增加許多教科書以外數學問題練習的機會，後續研究者在引用本研究的發現來論述教科書數學問題數量對學生數學學習的影響時，宜有所謹慎。

## 二、建議

本研究根據研究發現，提出以下幾點建議，供後續有興趣的研究人員一些思考與探究的方向。首先，從芬蘭的數學課程綱要來看，分數啟蒙是從二年級開始，強調透過具體的意義，來引入分數的概念，可是教科書中分數的基本意義卻是從三年級才出現(表 5)。為什麼會有課程綱要和教科書內容不一致的情況發生？芬蘭教科書內容的發展與審定過程為何？教科書編輯者擁有詮釋課程綱要的彈性有多大？這些值得進一步的探討，才能對芬蘭的數學課程有更進一步的瞭解。其次，建議探討教科書使用的議題。從問題數量上來看，芬蘭教科書中的數學問題是臺灣的兩倍(不包含 Additional tasks 和 Homework 兩部分)，問題數量非常多，教師會全部使用教科書中的問題嗎？而臺灣教科書中的數學問題雖然不多，但徐偉民(2010)的研究發現，教師在使用教科書時，都會增加許多練習題讓學生有熟練的機會，這是否是普遍的現象，值得進一步瞭解。意即，無法由教科書中的數學問題的數量，來論斷學生數學學習機會的多寡，必須要進一步瞭解教室內教師使用教科書的情形。此外，臺灣和芬蘭數學問題不同的呈現方式，對老師的數學教學產生什麼樣的影響？因為從兩國在分數例題的呈現方式、表徵形式和知識屬性三個面向來看，芬蘭國小階段的分數教材，是偏向以定義、數學符號的方式來呈現，同時以強化學生的分數計算能力為主。而臺灣則是從概念的意義著手，採用較多元的表徵來呈現，同時兼顧概念的理解和連結應用的部分。不同的分數例題的呈現方式，對教師的教學有何影響？教師會完全依據教科書中的呈現方式來進行教學嗎？對學生分數主題的學習又產生何種影響？這些都值得進一步探討。

## 致謝

衷心感謝審查委員對本文所提供的寶貴意見，使本文得以更完整、更清楚地呈現；也感謝國科會提供經費協助(計畫編號：NSC 99-2511-S-153-011)。文中的論點為作者所有，不代表國科會。

## 參考文獻

- 王文科(2002)。教育研究法。臺北：五南。
- 王石番(1996)。傳播內容分析法：理論與實證。臺北：幼獅文化。
- 尤欣涵(2010)。臺灣、美國與新加坡中學階段幾何教材內容之分析比較-以三角形為例。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義。
- 呂玉琴(1991)。分數概念文獻探討。臺北師院學報，4，573-605。
- 呂玉琴(1998)。國小教師分數教學之相關知識研究。臺北師院學報，11，393-438。
- 呂玉琴、李源順、劉曼麗、吳毓瑩(2009)。國小分數與小數的教學、學習與評量。臺北：五南。
- 吳麗玲、楊德清(2007)。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題呈現與知識屬性差異之研究。國立編譯館館刊，35(1)，27-41。
- 林碧珍(1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。新竹師院學報，4，295-347。
- 林素微(2008)。臺灣學生數學素養的表現。載於林煥祥(主編)，臺灣參加PISA 2006成果報告(頁131-161)。花蓮：國立花蓮教育大學科學教育中心。
- 洪素敏、楊德清(2002)。創意教學～分數的補救教學。科學教育研究與發展季刊，29，33-52。
- 徐偉民、徐于婷(2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。教育實踐與研究，22(2)，67-94。
- 徐偉民(2010)。影響國小教師數學課程實施之研究。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫結案報告，計畫編號：NSC 98-2511-S-153-004。
- 徐偉民、林美如(2009)。台灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。彰化師大教育學報，16，49-75。
- 徐偉民(2011a)。數學課程實施：一位國小資深教師的個案研究。科學教育學刊，19(2)，101-122。
- 徐偉民(2011b)。三位六年級教師數學課程實施之比較。教育研究集刊，57(2)，

85-120。

- 陳梅生、吳德邦(1986)。我國與美國小學數學教育比較研究：美國波斯頓小學數學課程與我國小學數學課程比較。**師大學報**，**31**，565-602。
- 陳仁輝、楊德清(2010)。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊**，**18(1)**，43-61。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛(2005)。中小學數學科數學綱要評估與發展研究報告書。**台灣之1至12年級數學綱要的一貫性與銜接性研究，以及和美國加州、英國、新加坡、日本、中國大陸、南韓之跨國比較**。臺北：教育部。
- 陳之華(2007)。**學習，可以非常生活化**。2010年3月7日，取自：  
<http://tw.myblog.yahoo.com/yolanda-chen/article?mid=5277&prev=6603&next=3891&l=f&fid=26>
- 國家教育研究院籌備處主編(2010a)。**國民小學數學第8冊**。臺北：國家教育研究院籌備處。
- 國家教育研究院籌備處主編(2010b)。**國民小學數學第10冊**。臺北：國家教育研究院籌備處。
- 教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北：教育部。
- 莊月嬌、張英傑(2006)。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。**國立臺北教育大學學報**，**19(1)**，33-66。
- 楊德清、施怡真、徐偉民、尤欣涵(2011)。台灣、美國和新加坡小一數學教材內容之比較研究。**課程與教學季刊**，**14(2)**，103-134。
- 楊明憬(2008)。**臺灣與美國國小二到三年級數學乘法教材之研究**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義。
- 劉秋木(2002)。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。
- 歐用生(1994)。**教育研究法**。臺北：師大書苑。
- 歐用生(2000)。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發(主編)，**教育研究法**(頁229-254)。臺北：師大書苑。
- 鄭國順、牟中原(2005)。由國民中小學教科書部編與民編併行：談部編本教科書研發編輯理念與特色。**研習資訊**，**22(4)**，67-69。
- 謝堅、蔣治邦、林昭珍、吳淑娟(2001)。**國小數學教材分析：小數的概念與運算**。臺北市：臺灣省國民學校教師研習會。
- 蔡麗蓉(2003)。**國小數學科審定本教科書分數教材之內容分析**。國立臺中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，臺中。

- 翰林我的網(2010)。99 學年度部編本數學國小教材簡介。2010 年 8 月 16 日，  
取 自 :  
<http://www.worldone.com.tw/page.do?pageId=20&channelTwoNumber=39>
- 鍾 靜(2005)。論數學課程近十年來之變革。教育研究月刊，133，124-134。
- 魏曼依(2007)。理解芬蘭－從國民教育、國家核心課程到PISA測驗成果。中等教育，59(2)。52-69。
- Artzt, A. F. & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 296-333). NY: Macmillan.
- Behr, M. J. & Post, T. R. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grade K-8*(pp190-229). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 323-341.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics*. Eastbourne, East Sussex: Holt, Rinehart and Winston.
- Grouws, D., Smith, M., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. Mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. Lester (Eds.), *The 1990 through 2000 mathematics assessments of the National Assessment of Educational Progress: Results and interpretations* (pp.221-269). Reston, VA: NCTM.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., & Jacobs, J., et al. (2003). Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study. Washington, DC: NCTM.
- Kennedy, L. M. & Tipps, S. (2000). *Guiding children's learning of mathematics*. 9<sup>th</sup> ed. Belmont, CA: Wadsworth.
- Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving, In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*, (pp.33-40), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lloyd, G. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 63-94.
- Malaty, G. (2007). What are the reasons behind the success of Finland in PISA? *Matematik I Norden Finland*, 29(6), 4-10.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Board of Education (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved February 14, 2010, from [http://www.oph.fi/english/publications/2009/national\\_core\\_curricula](http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curricula)
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundation for success: The final report of the National Mathematics Advisory*. Washington, D. C.: U. S. Department of Education.
- National Research Council (2004). Framework for evaluating curricular effectiveness. In J. Confrey & V. Stohl (Eds.), *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations* (pp. 36-64). Washington, DC: National Academies Press.
- Nicol, C. & Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331-355.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000*. Paris: OECD.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2007). *PISA 2006 results: PISA 2006 science competencies for tomorrow's world executive summary*. Retrieved February 14, 2010, from [http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en\\_32252351\\_3223573111111,00.html](http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_3223573111111,00.html)
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2010). PISA 2009

- Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science. Retrieved March 15, 2011, from <http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en>.
- Pehkonen, E. (2009). Problem solving in mathematics education in Finland. Retrieved November 16, 2009, from <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf>
- Pia Saarelainen.(Ed.).(2009a). *Laskutaito 3B in English*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Pia Saarelainen.(Ed.).(2009b). *Laskutaito 4B in English*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Pia Saarelainen.(Ed.).(2009c). *Laskutaito 5B in English*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Pia Saarelainen.(Ed.).(2009d). *Laskutaito 6B in English*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Son, J. & Senk, S. L. (2010). How Reform Curricula in the USA and Korea Present Multiplication and Division of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith M. (2007). How curriculum influences student learning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.319-369). Charlotte, NC: Information Age.
- Stigler, J. & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational Leadership*, 61(5), 12-17.
- Tarr, J., Reys, R., Reys, B., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.
- Törnroos, J. (2004). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and achievement*. Paper presenter at the meeting of the ICME-10 Discussion Group 14 ,Copenhagen: Demark.
- Wiske, M. S. (2005). *Teaching for understanding with technology*. San Francisco, LA: Jossey-Bass.
- Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 609-626.

# **The Content Analysis of Fraction Materials in the Elementary Mathematic Textbooks of Taiwan and Finland**

**Wei-Min Hsu\*    Huang-Yuan Huang\*\***

The purposes of this study were to compare the similarities and differences of fraction instructional materials used at the elementary school level in Taiwan and Finland. The instructional materials reviewed in this study were the official version textbooks used in Taiwan, and the WSOY version textbooks used in Finland. The content analysis was used as methodology and mathematics problems were used as analytic units. The analytic categories of fraction instructional materials were designed and used to analyze the characteristics and differences of fraction concepts represented in the textbooks between the two countries. The findings of this study revealed that the number of fraction tasks in Finland textbooks were double that of Taiwan textbooks. Finland provided more problem-solving opportunity for students than Taiwan did. Regarding the fraction problems presenting, we found most of the problems were classified as ‘the basic definition of fraction’ in two country textbooks, and presented in a spiral way. Most fraction concepts in Taiwan were presented one year earlier than Finland. Most problems were presented in mathematics form and focused on procedure practice in the two sets of textbooks. Compared with Taiwan textbooks, more problems in Finland textbooks focused on symbol representation and procedure using. Otherwise, the example problem was presented in different ways in the two sets of textbooks: in Taiwan, the examples were usually presented in several thinking process and representations that students might have, but in Finland, they were only presented with examples in a single or a definitive way to students.

Keywords: Content analysis, Fraction instructional material, Mathematics textbook

\*Wei-Min Hsu, Associate Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education

\*\*Huang-Yuan Huang, Teacher, Lin-Yuan Elementary School of Kaohsiung City