

等值分數補救教學之研究

洪素敏* 楊德清** 蔡鳳秋***

本研究之主要研究目的為透過訪談的方式從彰化縣某小學五年級的學生中篩選出缺乏等值分數概念之學生 12 位參與本研究。研究者依據相關之迷思概念，發展等值分數教學活動以進行補救教學，進而探討學生在補救教學活動後之等值分數概念的改變情形與進一步分析補救教學的實踐歷程。

研究結果顯示，教學前多數學生由於缺乏分數基本概念與單位量概念，以致於在處理等值分數問題時皆無法有效的解決問題，但是在補救教學後之訪談結果確顯示學生不但在分數之基本意義與單位量概念有大幅度之改進，同時在解等值分數之問題時，亦能迎刃而解。同時在補救教學中，教學者不但能夠建立學生對數學的信心，而且巧妙運用具體、半具體到抽象符號表徵的教學過程，不僅幫助學生建立了等值分數的意義，更讓學生了解等值分數有意義的求法。

關鍵字：等值分數、具體物教學、國小五年級

*作者現職：彰化縣萬興國小 教師、國立嘉義大學數學教育研究所碩士

**作者現職：國立嘉義大學數學教育研究所 教授（通訊作者）

***作者為國立嘉義大學數學教育研究所碩士

壹、動機與目的

數學教學應以學生的直觀經驗為基礎，經過逐步數學化過程的引導，促使學生建立相關知識（教育部，2000）。對數學知識的真正了解來自於學習者自己的經驗，以及對這些經驗的反思。數學老師的工作不是在教數學，而是在佈置情境，引導孩子在經歷不同的學習情境下能夠進行反思，並產生意義化的理解，進而與他人溝通、對話（NCTM, 2000）。在學習的過程中，最重要的是能獲得知識，並將舊知識與新知識重新融合成為自己的智慧。每一個新概念的形成都得透過許多活動，讓孩子從情境中去經驗，啟發他的思考，或獲得一種頓悟。

從事教學工作多年來，發現許多學生會認為「等值分數」很簡單，只要分子和分母同乘以或除以一個數字就可以得到一堆答案，但 Vence（1992）的研究卻提出等值分數的演算規則雖然很簡單，且學生解題成功率通常很高，但是高解題率卻不能保證學生能理解演算過程的意義。而在實際教學上也發現學生容易常出現許多錯誤，例如找等值分數時會單獨只將分母或分子乘以一個數字；或會用擴分的方式找比給定分數大的等值分數，但是無法找出比給定分數小的等值分數，例如給定分數為 $\frac{2}{14}$ ，他可以找到 $\frac{4}{28}$ 、 $\frac{6}{42}$... 為其等值分數，但不知道 $\frac{1}{7}$ 也是 $\frac{2}{14}$ 的等值分數；或者改變題目的類型時，就會發生錯誤，例如有的學生不知道 $\frac{2}{5}$ 也可以是圖 1 的答案。

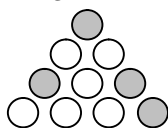


圖 1

而學生會發生這樣的錯誤，顯示其並不真正瞭解等值分數的意義（Kamii, 1995；Vence, 1992；甯自強，1997；龐嘉芬、陳淑琳，2000）。也許是因為學生只記得老師教學的最後結論：等值分數的求法就是將分母和分子同乘以一個數，又或者只學到半套技術，所以只會去乘分數的一部份。

我常想：對孩子而言，能夠「知道」數學知識這件事，也許遠不及「感覺」來得重要！那麼，對於教學者而言，營造讓孩子能具體操作，從中經驗、感覺的教學環境，是讓知識的種子得以成長的土

壤。針對這樣的想法設計教學活動，想透過具體操作的教學歷程，希望對孩子在等值分數的學習上有所幫助。基於此，本研究之研究問題為：

- 一、教學前受訪學生在等值分數之迷思概念為何？
- 二、探討教師如何將等值分數教學活動實施於補救教學之歷程？
- 三、教學後受訪學生在等值分數之迷思概念的改變情形為何？

貳、文獻探討

一、等值分數之相關研究

等值分數是一個複合的概念，其意義除以不同的分數來表示同一個量外（Vence,1992；甯自強，1997），也可以視為兩分數分子分母間及分母間和分子間乘法性關係必須相等的意義（Kamii, 1995）。若學生要對等值分數概念有所瞭解，需具備分數啟蒙學習時「等分和窮盡」概念的穩固基礎，而等值分數概念又會影響學生後續對「分數的運算及分數的比較」概念的學習(Behr & Post, 1992)，且等值分數亦是理解諸多數學概念（如比、比例、百分率等）重要的關鍵，而這些概念更是往後學生學習其它領域如代數、科學等知識的重要基礎（Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984）。由此可知，國小學童對等值分數必須要有良好的學習與理解。

龐嘉芬和陳淑琳（2000）指出學生雖能利用擴約分進行找尋等值分數，卻無法理解其在概念上的差異，往往易流於數字遊戲的操弄而已。而 Kamii（1995）和 Vence(1992)的研究亦指出當學生沒有或具備錯誤的分子分母乘法性觀念，容易造成等值分數概念的錯誤。因此，如何協助學生完善的學習等值分數概念是身為教師的我們不可推卸的責任，不要讓我們的孩子往往只知所以而不知所以然。Vence(1992)認為等值分數概念的學習，需要隨著時間慢慢由具體的實物感逐漸脫離實物的狀態，進行形成抽象的表徵。而 Behr 等人（1984）亦提等值分數的學習過程中，必須讓學生先進行具體物內之操作及轉換後，學生也才能真正理解符號運作的意義，否則學生易產生運算和理解是不同調的兩件事（Vence,1992），而待學生必須瞭解了「具體物」和「符號之間的關係」時，才能成功理解符號表徵中等值所代表的意義。

專論

綜合上述，等值分數是國內高年級數學課程中相當重要的一環，且對等值分數的熟捻，可協助學生日後在比較不同分母的分數與進行分數的運算時能有較良好的表現（Vence, 1992；Behr et al., 1984）。而讓學生實際具體操作，實際經驗等值分數在操作物或其他表徵與符號表徵間的轉換，對學生在等值分數概念及運算規則背後的意能產生有意義的理解。

二、學生的學習經驗

研究者以所任教學校的國小五年級學童（於八十七學年度入學的孩子）為教學對象。這批五年級學生所學習過的數學教材為：低年級使用新課程的南一版數學教科書，三年級至五年級使用 82 年版的國立編譯館教科書，所以沒有接觸過正在實施的九年一貫數學課程。

學生從三年級開始討論分子與分母相同的分數與單位量「1」之間的等價關係，但是「等值分數」這個名詞尚未正式引入。在經驗過「十分之一」與「百分之十」兩個被計數單位間的化聚活動（四年級）；在單位分數內容物為整數個物情境下，探討單位分數單位與基準單位量間的化聚活動；在離散量的情境下，進行異分母真分數的比較活動；漸漸地將範圍擴展至單位分數內容物為非整數個物，並討論分數間等值關係或次序關係的遞移性質（五年級）。等學生累積足夠的等值分數經驗後，「等值分數」的數學名稱才正式引入。

三、教學研究

多一些例子、多一些經驗，讓學童能體會到分數也是一個「數」，而分數的運算要在學童瞭解「分數是數」的概念之後進行。17 世紀捷克教育學家 Comenius 主張直觀教學是教學的不二法則；此外，學者 Fischbein（1987）與 van Hiele（1986）亦提出運用直觀的模式，有助於學生在數學概念的學習。因此，教學最好從例子開始，先討論例子中的現象，再指出它的結構，然後對這情況之下最有效的定義（王安蘭，2004）。

從學者的建議中不難發現，分數概念的教學要從具體的情境或操作物中入門，豐富學童的經驗，以做為繼續學習的基石，如 Murray et al.（1996）對教學者提出許多在分數概念教學上的建議，例如：利用幾何圖形、在平行線上標示分數或電算器的操作，增加學童對等值分數的觀念；而國內學者也有

許多對於分數的教學的建議，例如：劉秋木（1996）認為等值分數的教學應舉生活實例（吃月餅）引起動機，並作為類化（分數板）的範例；黃志敘（2005）應用資訊融入教學，將等值分數數學教學活動融入電腦中，經由電腦製成分數棒表，協助兒童發展穩固的等值分數概念進而並運用於日常生活情境中，而其教學結果發現設計適當輔助教學工具來幫助兒童學習及理解等值分數，是一種有效率的教學方法；林玉祥（2004）的教學研究中利用「分數拼板」教導學生分數概念，亦發現藉由操作物的具體呈現對於學生分數的學習助益極大。

由上可知，具體物、具體情境在等值分數教學上扮演著重要的角色。雖然以目前國內教學環境而言，教科書教學活動提供具體的情境，學生也可以使用具體物操作的方式來學習、理解等值分數抽象概念，例如：分數圖卡、分數版、繩子、花片等等。但我想這些教具學生們都看過、摸過，只是礙於現實環境，他們沒有豐富的實際操作機會，以致在建立分數概念的心像上，與抽象符號表徵間產生落差（Cramer, Post, & delMas, 2002）。然而，從具體物操作到圖像，進而至符號表徵，往往容易因中間的沒有適時的搭起橋樑，而使得學生學習上產生沒辦法銜接的窘境。因此，本研究將嘗試協助學生搭起從具體物操作經驗，進入運用圖像表式的方式，以引導兒童建構心像思考的能力，使其面對不同的問題情境時，能靈活運用其概念。並期望可作為課室中等值分數教學的參考依據。

參、研究法

一、研究設計

本研究採行動研究法以進行資料之蒐集與分析。研究者在暑期時對 12 名學生進行等值分數概念的教學，並與數學教育專家討論、協商、省思、與辯證，然後根據問題尋求解決策略，再將此教學策略實際應用於課室並評量（評量包括：教室觀察、工作單、數學日誌、與測驗）學習成效，以進一步發現問題，再設法尋求解決之道；此過程是持續進行，直到問題被解決。行動過程如下圖 2：

二、研究對象

本研究是以研究者所服務的彰化縣某國小的五年級學生為研究對象。由於教學研究於暑假進行，

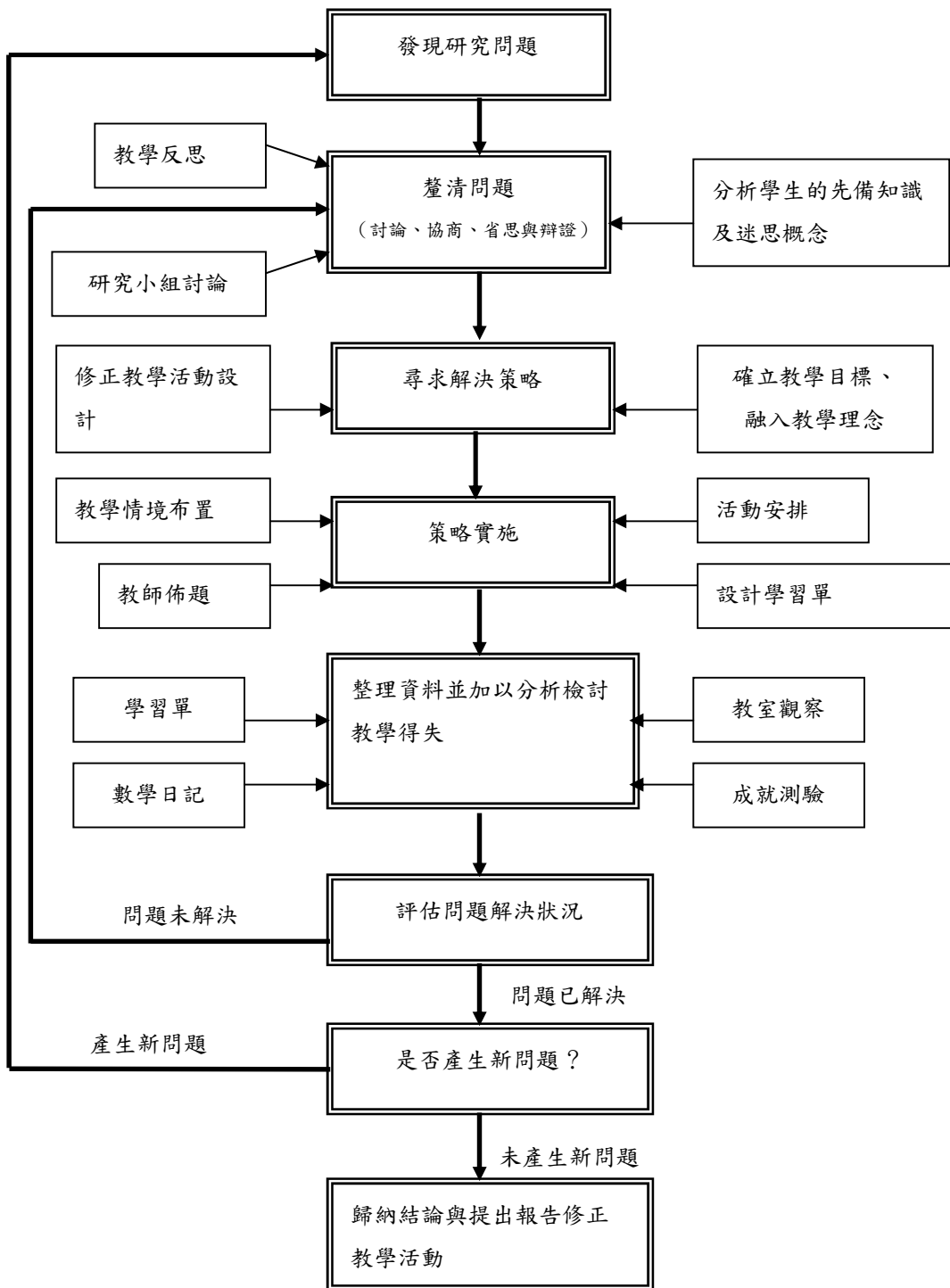


圖 2 行動研究架構圖

因此，與本校五年級三個班級的導師共同協商後請老師鼓勵並推薦學習意願較高，數學能力較弱的二十位學生接受訪談，最後從中挑選出具有等值分數迷思概念且願意參與等值分數教學之學生

12 人參與本教學研究。12 位參與本教學研究之學生的特質分別描述如下：

S₁ (女)：很聰明，但不愛學習，在班上的數學成績維持在中下的水準。喜歡把自己打扮得漂漂亮亮當個小女王，卻也因此常惹出是非。

S₂ (男，10 分)：很冷靜，做事有條理，有自己的一套，總是善盡自己的本份。各科功課方面則有中上的表現。

S₃ (女)：嘖哩呱啦的小女生，很愛力求表現。對任何事都有自己的想法，很有主見，雖然有時很難得到老師的認同。語文程度頗佳，但常抱怨數學令她頭昏腦脹。

S₄ (女)：個性柔柔靜靜的，很願意去學習新事物，但若老師沒有特意給予機會發揮，就會在一旁靜觀，讓人很容易忽略她的存在，就如同她的學科成績一樣，普普通通，老師會不自覺地忘了為這些學生加油。

S₅ (女)：很感性的孩子，善體老師的心意，當她很喜歡這位老師時，會很努力地朝老師的期望去做，因此她的成績高低視喜愛老師的程度而定，以五年級的數學表現而言，約有 70 分的水平。

S₆ (女)：個性機靈古怪，人緣頗佳。喜愛做些小手工藝品，對學科顯得興趣缺缺，因此數學成績有些慘不忍睹。但如果拋一個問題要她思考，她會去嘗試。

S₇ (女)：動靜皆宜，玩的時候很瘋，上課卻也能熱烈參與，發表想法，是課堂討論時為同學點燈的人，但在數學成績上不若其他科目表現亮眼。

S₈ (男)：憨厚老實，不太發言。害怕挫折，功課只求有完成就好，不太願意積極面對不懂的地方，各科的學習成就都差強人意。

S₉ (男)：個性活潑開朗，有些大而化之。上課愛發表高見，愛搞些小動作引人注意，雖然常會偏離主題，但在老師的提醒下，往往能回歸正題，因此在班上的數學表現也總在中下程度之間徘徊，無法突破。

S₁₀ (男)：是個覺得五年級生涯很煩的孩子。很認真，但是學得很辛苦，效果也不佳，因此極少發言，數學成績也總在及格邊緣徘徊。

專論

S₁₁ (男)：活潑機靈，超級愛面子。因上課話特多，學習成績並不理想，數學偶而表現好。但通常在老師適時的提醒引導，方能夠激發出想法，發現一些道理來。

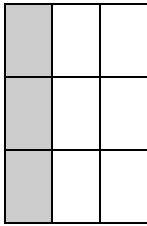
S₁₂ (女)：有些畏縮，做什麼事都缺乏信心，當然做數學也不例外。雖然周圍有些好朋友，但朋友的表現都比她搶眼，讓她似乎一直找不到屬於自己的定位。

三、研究工具

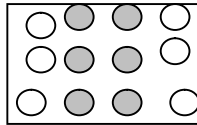
檢測活動：研究者設計兩題等值分數概念相關之問題並採半結構式晤談法以深入診斷參與樣本之等值分數概念。問題如下：

(一) 下列哪一個圖形最能夠代表 $\frac{3}{6}$ 的意義？

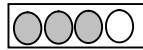
(1)



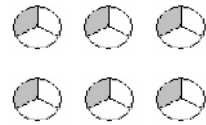
(2)



(3)



(4)

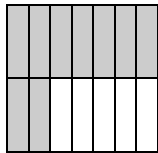


(二) 下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{9}{14}$ 哪一個分數比較大？

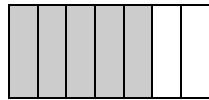
(1)



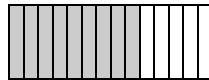
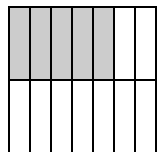
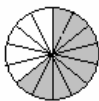
(2)



(3)



(4)



教學後亦以此兩題進行後測訪談，以評量學童之學習成效。

從檢測活動中可以發現學生在等值分數上的迷思概念有：1.不瞭解等值分數的意義；2.等值

分數的求法和分數的乘法混淆。

教學活動：本研究依診斷結果，設計兩個活動以協助兒童修正迷思概念，活動如下：

教學活動一：切蛋糕（教學時間：80 分鐘）

教學目標：1.在連續量情境中讓學生認識等值分數；2.引導學生發現等值分數求法。

設計理念：在連續量的情境中，以剪紙的方式讓學生比較等值的部分，再藉由圖形並置，引導學生發現兩個分數間的關係，進而瞭解分子、分母可同乘一數，其分數值仍不會改變。

教學活動二：闔家大團圓（教學時間：80 分鐘）

教學目標：1.以分數板為教具，對等值分數做更深入的探究；2.以直觀的方式體驗分數的大小；3.引導學生發現單位量 1 與其他分數間的關係。

設計理念：能了解分數的組成及等值分數的切分原理，從活動中對等值分數做更深入的探究，並發現單位量 1 與其他分數間的關係。

四、資料的蒐集與分析

研究資料的主要來源包括：(1)教學者的教學過程實錄，本教學實錄包含了教師佈題、學生解題、師生互動、教師如何引導教學之進行、以及其他發生於教學期間之所有資料；(2)學生的工作單；(3)學生的數學日誌；(4)教學者的教學心得與反省札記；以及(5)教學者與研究者就教學過程中所產生之問題，經過檢討、溝通、與討論後所進行之記錄。

五、本研究的信度與效度

Patton(1990；吳芝儀和李奉儒譯，1995)認為：研究之信、效度主要受研究者的蒐集資料之方法與技巧、誠實、和哲學信念所影響；基於此，研究者盡可能引用受訪者的原始語句來描述事件、由兩位研究者進行同一研究依上述之原則，以增強本研究之信度；同時將採用下述之方法以增進本研究之效度：

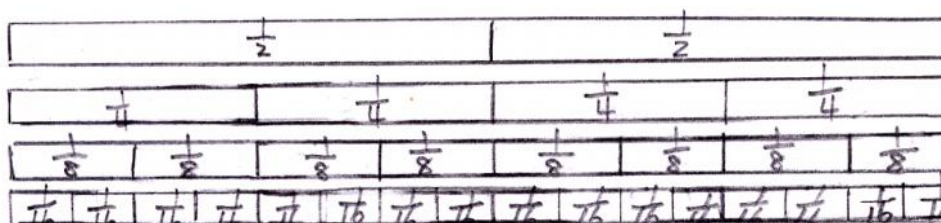
專論

(一) 採用人員的三角檢定：即分別進行開放式訪談，取得資料後，並由研究稽核、研究者進行資料分析及討論以取得共識。

(二) 資料來源的三角檢定：亦即比較和交叉檢驗，本研究資料來源有學生工作單、訪談逐字稿、研究日誌、上課觀察記錄等，本檢驗旨在比較、觀察資料和訪談資料。在此舉例如下：

S₇： $\frac{1}{3}$ 如果再對切一次，那就變成 6 等份，那就要拿 2 份，那都是 2 倍。

[S₇之上課發言]



[S₇之學習單]

S₇ 的說法是上課時解 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 時之說明，而 S₇ 之數學日誌是教師請學生解釋 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{4}$ ， $\frac{4}{8}$ 和 $\frac{8}{16}$

是否相等時的做法，題目不同，但概念相同，因此可以確認 S₇ 的確了解等值分數的意義。此外，研究群進行口語資料分析時，針對相關資料進行比對，口語資料分析之信度達 90% 以上，其餘不同處，經彼此之溝通後，亦已達一致。

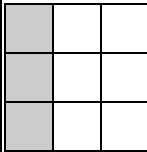
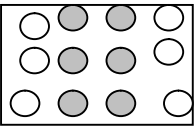

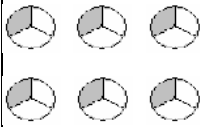
肆、研究結果與討論

本節分三部份：首先報告樣本學生在等值分數之迷思概念，然後詳述教學活動之實踐歷程，最後分析教學成效。分述如下：

一、學生迷思概念分析

(一) 下列哪一個圖形最能夠代表 $\frac{3}{6}$ 的意思？

表 1 第 (一) 題的答題情形

答題類型		* 		
選擇者	S1,S3,S5,S6,S7,S12	S2,S8,S10		S4,S9,S11

結果顯示大部分的人選擇錯誤選項 (1)，原因是只以分子分母的數字去思考，將整個圖形二分爲陰影部分和空白部分，忽略了分數是要考慮部分與整體的關係。例如：

S₁：因為黑的等於 3，空白的等於 6，所以是 $\frac{3}{6}$ ；

S₃：我覺得 $\frac{3}{6}$ 就是 6 個格子塗滿 3 格，第一個比較像；

S₁₂：「這裡有 3，這裡有 6」。

又或者選擇比較熟悉的圖形表徵，例如：

S₅：因為長方形比較看得懂；

S₆：因為第一個比較像我就選它了。

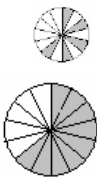
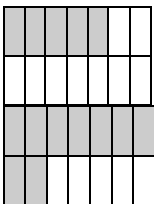
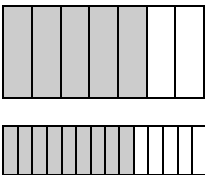
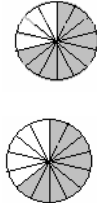
學生會認爲長方形是比較像的原因，可能與他們接觸的部編版數學教科書，常以長條圖爲分數的連續量圖形表徵有關。

S₄認爲第四個圖形總和爲 2，她說「分子的 3 是把它 3 等份，那分母 6 拿走 6 份，把全部併在一起就是 2」；S₉、S₁₁ 似乎把分母的 6 視爲 6 倍的關係，他回答研究者的詢問時說：「因為它有 6 份」。S₈ 雖然選擇正確的答案，但是他的理由是「因為有 6 個黑黑的，一行又有 3 個」，他只看黑色的部分，忽略了單位量，並不具有正確的分數概念。

(二) 下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{9}{14}$ 哪一個分數比較大？

專論

表 2 第 (二) 題的答題情形

答題類型	 $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$			<p>*</p> 
選擇者		S ₁ , S ₂ , S ₃ , S ₅ , S ₆ , S ₁₁	S ₄ , S ₈ , S ₉ , S ₁₀ , S ₁₂	S ₇

選擇錯誤選項 (2) 的學生中，有些學生會隨意更改單位量，選擇他們想看的部分，例如：

S₁、S₂：我只有看上面那一排；

S₅：我把它的一行格子拿走就成了 $\frac{5}{7}$ 。

有些學生等值分數概念不完備，亦即當分母變為 2 倍時，分子也要同時乘以 2，其值才不會改變，而 S₆ 回答：「它的 $\frac{5}{7}$ 是 7 格有 5 格是滿的，它說 $\frac{9}{14}$ 不就是 $7 \times 2 = 14$ ，再畫 9 格」；S₁₁ 說「我覺得格子一樣大，一樣多」，都顯示出不具有正確的等值分數概念。

選擇錯誤選項 (3) 的學生回答：

S₄：這裡一共有 7 塊，裡面有 5 塊等於 $\frac{5}{7}$ ；這裡一共有 14 塊，裡面有 9 塊等於 $\frac{9}{14}$ ；

S₈：因為它有 7 個又 5 個黑黑的；它有 14 個又 9 個黑黑的；

S₉、S₁₀：一個是 $\frac{5}{7}$ ，一個是 $\frac{9}{14}$ ；

可以發現學生犯了當比較分數大小時，單位量要一致才有意義的迷思概念。S₃、S₁₂ 回答研究者的追問時說，S₁₂「因為其他的答案我不瞭解」，S₃「我覺得一樣的格子比較看得懂，圓形的就不懂了」，他們受限於單一圖形表徵的限制，無法靈活地轉換解題情境。

綜合上述，不難發現此 12 位學生對等值分數的瞭解與應用上普遍具有迷思概念，不僅對等

值分數意義不瞭解，且在等值分數的求法時易和分數的乘法混淆。此外，從學生的回答中，亦可以知道學生對圖形具體化表徵和分數詞之間無法做彈性的轉換，並侷限於單一圖形表徵的影響，使得學生在面對不同情境時，無法靈活的運用。然而，Vence（1992）與 Behr 等人（1984）提出等值分數的學習過程中，必須讓學生先進行具體物內之操作及轉換後，學生也才能真正理解符號運作的意義，有鑑於此研究者為了讓學生能對等值分數之運算和理解同時產生良好的瞭解，因此展開了下列透過具體物操作的教學歷程，希望對孩子在等值分數的學習上有所幫助。

二、教學活動之實踐歷程

針對學生的迷思概念，設計「切蛋糕」、「闔家大團圓」兩個教學活動。「切蛋糕」是在連續量的情境中，以剪紙的方式讓學生比較等值的部分，再藉由圖形並置，引導學生發現兩個分數間的關係，進而瞭解分子、分母可同乘一數，其分數值仍不會改變；「闔家大團圓」讓學生從活動中對等值分數做更深入的探究，並發現單位量與其他分數間的關係。以下呈現教學的實況。

(一)教學活動一：切蛋糕

教師佈題： $\frac{1}{3}$ 個等於 $\frac{2}{6}$ 個嗎？

T:把長方形紙張想像成各種美味的長條蛋糕。如果把蛋糕平分給2人，每人可以吃到幾條蛋糕？把它剪下來，並寫上分數詞。如下圖3：

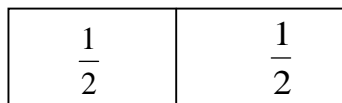


圖3 學生實作

再仿照上面的作法，如果平分給3個人呢？6個人呢？9個人呢？

討論時黑板的角落有一組畫出的圖形（如圖4），而說分給六個人時每一個人各吃 $\frac{2}{6}$ 條蛋糕，而不是 $\frac{1}{3}$ 條蛋糕，此時S₁₀覺得很奇怪。當時我故意不直接給予答案，因為S₁₀的問題正好提供

一個很好的開頭---為利用具體物的操作進行「等值分數」教學揭開序幕。

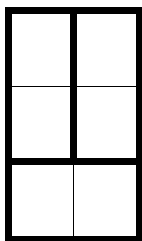


圖 4 學生實作

S₁₀：老師，為什麼會有 $\frac{2}{6}$ 出現？

T：很好喔，會提出問題，我們請畫的人來說說看好了。

S₇：沒有啦，我剛剛就直接這樣摺，打開之後就是 6 份（提醒她是 6 等份），那就是一個人 2 份（圖 4），所以一個人就是 $\frac{2}{6}$ 。

T：可以嗎？（S₁₀ 點點頭）那老師問你們， $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 嗎？

S：（遲疑，最後有 3 個人舉手同意）

從紙張的折疊裡， $\frac{2}{6}$ 的出現引起了學生的注意。雖然經過 S₇ 的解說後，學生 S₁₀ 覺得 S₇ 的

說法合情合理，但要因此就接受 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 似乎有些不放心，甚至遲遲無法決定。此外，研究者爲了

更進一步加強 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 背後所隱藏的意義，因此決定把各小組所出現過的正方形摺紙情形並置在一

起比較異同。

1. 藉由圖形並置的方式發現等值分數

T：我們把剛剛的正方形看有幾種不同的摺紙方式，拿出來放在一起（共有三種方式，並置貼在黑板上如圖 5），發現什麼了嗎？

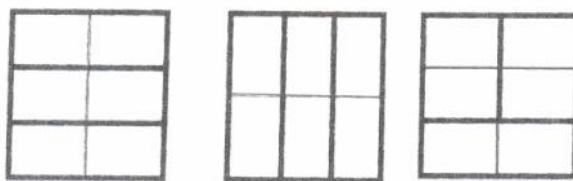


圖 5 學生實作

有的學生在這裡能夠看得出來，少部分的人仍需要動手把前兩張正方形左右對摺或上下對摺之後，確認兩小塊會等於一大塊，甚至需要剪剪看，再把它們重疊在一起確認。在具體物的操弄下，學生皆可發現 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 之等值分數的事實。因此接下來的活動，將持續營造在連續量的情境，以剪紙的方式讓學生比較等值的部分，再藉由圖形並置的方式，引導學生發現兩個分數間的關係，進而瞭解分子、分母可同乘一數，其分數值仍不會改變。

要學生在長方形紙條上剪出 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{9}$ 的紙片並不困難，我想做的事是引導他們把紙片並置在一起時（如圖 6），如何以算式表示之間的關係，也就是以抽象符號表徵 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{9}$ 之間的關係。

1								
$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

圖 6 教學示例

T：2 個 $\frac{1}{6}$ 用乘法怎麼表示？請一個小朋友上來寫寫看。

【學生對於請他們用算式來表示關係有些疑惑，因此先複習乘法的意義～幾倍、幾個的

專論

意思，這也是當初學生學習分數詞的方式。】

$$S: \frac{1}{6} \times 2 = \frac{2}{6}$$

T: 那 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{6}$ 相等怎麼表示？

$$S: \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

以同樣的方式引導小朋友寫出 $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ ，最後表示成 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ 。從圖 6 的圖形表徵中，學生

發現這樣的道理應該是很自然的。

T: 既然大家對 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ 沒有問題了，那來看看數字之間有什麼關係？

S: 它有倍數的關係。

T: 倍數的關係？怎樣的倍數關係，來說清楚。

S: 都是乘以幾倍。

T: 誰要乘以幾倍？

S: 上面和下面（指分子和分母）

【教學者把這樣的關係在黑板上表示出來，如圖 7】

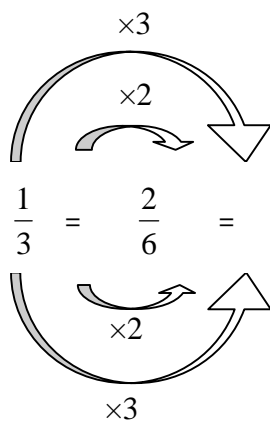


圖 7 教學示例

T：你想，可以同時把分子、分母乘以 4 倍嗎？

S：(等了一會兒) 可以。

T：那 5 倍呢？6 倍呢？

然後學生對於這樣的問題：一個分數的等值分數，也就是和它相等的分數有幾個？能回答出很多個或無限多個，因為可以乘到很多倍。也有人說，這就是約分和擴分了。但是學生一直提到「乘以幾倍」或「它有倍數關係」，讓人很擔心他們是不是與分數的乘法運算搞混了。因此決定再回到具體操作、圖形表徵的教學階段，重新探究為什麼等值分數的分子、分母都要乘以相同的倍數。

我有一些感觸，在學習方面較低成就的孩子，每一個概念的建立都不是那麼理所當然、順理成章。教學要照顧到這些孩子，老師必須要費盡心思才行（920701 札）。

2. 以圖形重疊的方式，探究等值分數求法的算則意義

每組發給一張長方形的白紙，一步一步引導學生在白紙上完成下列的動作：

T：小朋友，把這張白紙當成單位量 1，那麼 $\frac{1}{3}$ 張白紙要怎麼做？

S：平分成 3 等份，其中的 1 等份。

T：好，你把它摺出來，畫出 3 等份的線，並且在 $\frac{1}{3}$ 的地方塗上斜線（如圖 8）。

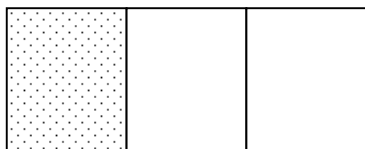


圖 8 紙張 3 等份之完成圖

【確認每一組都完成後，繼續下面的動作】

T：同樣是這張白紙，再對摺一次，現在有幾等份了？

專論

S：6 等份！

T：把 6 等份用不同顏色的筆畫出來，並在 $\frac{2}{6}$ 的地方塗上斜線（以同樣的方法完成 $\frac{3}{9}$ ，最後如圖 9、10）。

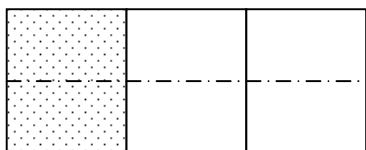


圖 9 紙張 6 等份之完成圖

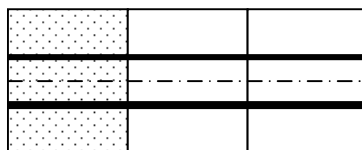


圖 10 紙張 9 等份之完成圖

T：小朋友你發現什麼了嗎？

S： $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{6}$ 、 $\frac{3}{9}$ 都在同一個位置上。真的耶！剛好都一樣大。

T：這三個分數就是等值分數。你們能不能從剛剛所做的活動中，解釋為什麼找等值分數就是把分子、分母都乘以相同的倍數？

我想，把圖形重疊在一起會比並置圖形的方式，學生能更直覺地感受到「等值」，但是如何解釋算則才是最恰當的，我心裡其實還未有定論。因此，先將這個問題丟給學生，想看看他們有什麼想法。等了很久學生都沒有任何的反應，決定點名程度最好的 S₇ 發言。

S₇：就是等分吧？

T：等分？ㄟ～這是什麼意思？能不能再說清楚一點？

S₇： $\frac{1}{3}$ 如果再對切一次，那就變成 6 等份，那就要拿 2 份，那就都是 2 倍。

S₇ 的回答令我靈光一閃，我突然也懂了（或者說知道怎麼去解釋）為什麼分子、分母都要乘以相同的倍數，其值才會不變。因為分母所乘的倍數，代表切割成更小的份數，那麼就要拿走更多的份數（這就是分子），才會與原來的分數相等。接下來我和 S₇ 努力地將這樣的想法解釋給同學聽，但到底有多少人能夠心領神會呢？最後我請學生舉出 4 個不同的等值分數並說明為什麼相

等時，部分的學生會用下列兩種方式去找，有些人再加上畫圖的方式說明相等（圖 11、12）。

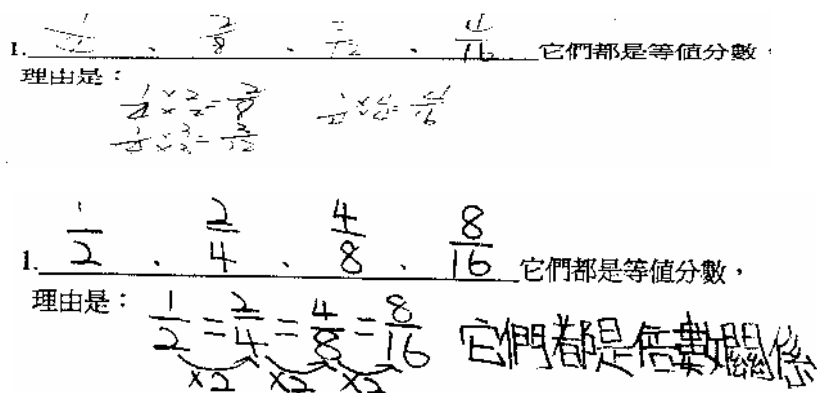


圖 11 S1、S2 的學習單

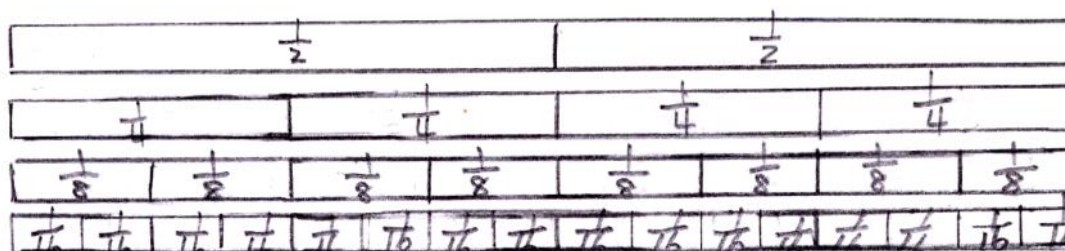


圖 12 S3、S7 的學習單

S₁₂ 在學習單上寫著：我想表達的是，如一條長 4 公分的彩帶，平分成 4 等份，我拿了 4 份裡的 2 份，就是 $\frac{2}{4}$ ；那再一條長 4 公分的彩帶，我又平分成 2 等份，拿了一份，那就是 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 。

3. 教學的省思與改進

學生從具體操作至半具體操作（圖形表徵），在「意、像」上連結得很順利，因為兩者的差別只在於用畫圖的方式模擬、複製實際的操作物，在物體的形狀上並沒有太大的改變，所代表的意義也有一致性。但要過渡到抽象符號的表徵時，師生的教與學顯然都有著看不見的門檻存在～要在什麼樣的時機導入算則？怎樣賦予算則意義？怎樣的教學對學生而言才是有意義的學習？再再衝擊著教學者的專業素養（920701 札）。研究小組認為，越抽象的東西越不能「高空建閣樓」。對於本來就對數學學習缺乏信心的孩子而言，更不能抽離具體物操弄的階段，也許再試試從不同

專論

的路徑去達陣（920701 討）。

因此，接下的活動仍然是等值分數的探究，將使用不同的教具，但是相同的教學進程，也就是從具體、半具體至抽象符號表徵的教學過程，幫助學生尋求精簡的數學符號意義。

(二)教學活動二：闔家大團圓

1.與分數板的第一次接觸

參加等值分數教學的學生，所使用的數學教科書版本並沒有出現過分數板。這個活動以最多等分為 12 塊的分數板數套為教具，希望藉由不同操作物經驗，豐富學生的表徵類型。活動中將一個完整的圓當成單位量 1，學生在替換不同的分數板時，仍要維持 1 不變，引導學生從中發現 1 與其他分數間的關係。

教學活動之前請學生先把所有 2~12 等分的分數板組合好鋪平在桌上，大家圍在分數板的周圍。學生都暱稱此為披薩，因為這種教具是一片片橘色，背後有磁鐵的泡棉板，排好的圖形如下

（圖 13）：

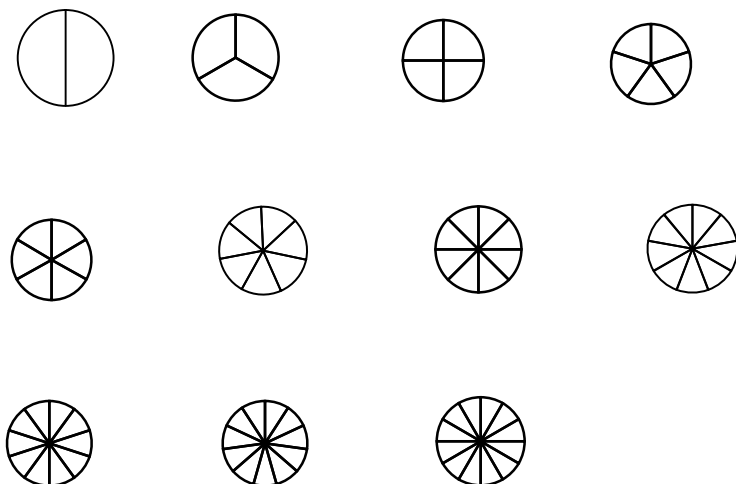


圖 13 分數拼板

T：都看過了對不對？在我們開始之前，先想想看，把誰當作 1。

S：披薩。

T：幾個披薩當作 1。

S：1 個披薩（圓）當作 1。

當學生確實知道 1 個圓當作 1 時，我們開始為每一片分數板命名，例如：切成 2 等份的每 1 份為 $\frac{1}{2}$ ，切為 3 等份者每一份為 $\frac{1}{3}$ ，以此類推至 $\frac{1}{12}$ ，再與前一個活動結合，表示成算式 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ 、 $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ …… $\frac{1}{12} \times 12 = 1$ 。

T：好，看清楚，老師問你們，如果我都只拿出其中的一塊（指 $\frac{1}{2}$ …… $\frac{1}{12}$ 各拿出一片），你們覺得誰最大？誰最小？

S： $\frac{1}{2}$ 最大， $\frac{1}{12}$ 最小。

T：為什麼？

S：一看就知道！

T：還有呢？

S：因為分母愈小，分數就愈大。

T：這是什麼意思？

S₁₁：因為它分得愈少塊，就會愈大。

T：你們都同意嗎？（大家表示一致的贊同）

「分得愈少塊，就會愈大」，因此「分母愈小，分數就愈大」，這個口訣原來是這樣來的。我想換個角度讓他們思考問題，引導他們看剩下來的部分，先確認他們知道剩下來的部分為 $\frac{1}{2}$ 、

$\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{5}$ …… $\frac{11}{12}$ ，我抓出其中 4 個，分別為 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{5}{6}$ 、 $\frac{7}{8}$ 、 $\frac{9}{10}$ ，讓缺口的部分差異明顯一些。

T：這 4 個分數誰最大？誰最小？

專論

S: $\frac{3}{4}$ 最大, $\frac{9}{10}$ 最小。(但是有人發出不同的聲音) 不對喔, 是 $\frac{9}{10}$ 最大, $\frac{3}{4}$ 最小。

T: 是那一個呢?

S: $\frac{9}{10}$ 最大。

T: 為什麼?

S₇: 因為它缺得最小 (指 $\frac{9}{10}$ 之缺口 $\frac{1}{10}$), 在這裡 (指 4 個分數缺口的部分)。

T: 很好, 可是你們不是說「分母愈小, 分數就愈大」嗎?

我發現學生對於「分母愈小, 分數就愈大」這個口訣, 簡直可以用根深蒂固來形容, 也許是受到老師平常上課時不斷強調的結果。先前的教學經驗就發現很多的學生以這樣的想法來比較分數大小, 此時他們又再度地朗朗上口, 一點都沒有警覺到它並不適用所有的解題情境。因此試著在各種教學情境中, 扭轉學生的想法。

T: 我們來確定一下, 現在要進行比較大小的主角是誰?

S: 這些。(用手比畫出披薩剩下來的部分)

T: 剛剛老師都只取其中的 1 等份, 所以你說分得愈少, 就愈大, 老師同意, 那現在呢?

S: 它有很多塊。

T: 然後呢?

S: 要把它拿幾塊也算進去。

T: 對啊, 要一起考慮進去, 就像人家問說: 這麼多對母子中那一組比較重? 你只要看媽媽的重量就好了嗎?

S: 不是, 還要看孩子的。

T: 所以一個分數有多大, 要分母、分子一起考慮進去才行。

有時候就算「事實擺在眼前」, 學生仍會自然地 (堅持地) 以他原有的想法去推測答案, 讓

教學者覺得棘手(920702 觀)。在換個角度去看披薩時，是希望製造出「分母愈小，分數就愈大」這樣說法的衝突，但有的學生能從缺口的部分去做反向思考，令人感到欣喜，這足以顯示學生思考的精進與多元化。這也應證了先前之研究(Behr, et al., 1984; Cramer, et al., 2002; 楊德清、洪素敏, 2003)，學生能夠思考分數剩餘部分，進而比較分數大小，顯示已發展出較好之分數概念！

2. 透過分數板置換，探究單位量 1 與其他分數間的關係

前一個活動是用每一種同樣大小的分數板組合成一個完整的圓，接下來學生要選用不同的分數板來組合成一個圓，每一種分數板的個數不限。結果學生非常熱烈地排出以各種不同分數板組合的圓，但我驚訝地發現，全部都錯了。

T：你們是用什麼方法找出來的？

S：用湊的，只要能排成 1 個圓就好了。

T：可是它們合起來要 1，你們能確定嗎？

S：可以啊，中間沒有空隙，周圍沒有凸出來的。

由於分數板教具都有些微的誤差，因此當學生以 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ 組合起來仍可以是一個圓，而且乍看之下就如其所言，「中間沒有空隙，周圍沒有凸出來」，這也正顯示出使用具體物輔助教學所可能產生的盲點。學生完全以直觀的想法來進行這個活動，無法以數學的理由來辯證，因此提醒學生將等值分數的概念做連結。

T：你們要用數學的理由來說服別人，為什麼這些分數板合起來是等於 1。

S：可是我們不知道怎麼把這些分數通分？

T：喔，你們想要用通分的，工程會很浩大耶，可以這樣想嗎？剛剛我們說如果用 $\frac{1}{2}$ 的分數板的話，要幾個才能組合成 1？

S：2 個。

專論

T：怎麼說服別人？

S： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 就是一半再加一半就是等於 1。

T：很好，這樣講就很有數學味道。如果我把其中一塊 $\frac{1}{2}$ 拿掉，誰可以補上？

S：2 個 $\frac{1}{4}$ 。

T：怎麼說服別人。

S：2 個 $\frac{1}{4}$ 就是 $\frac{1}{2}$ ，再加上原來的 $\frac{1}{2}$ 就是 1。

T：很好，這是不是比什麼「沒有空隙」更來得有證據，可以告訴別人這就等於 1。

鼓勵學生先從置換出圓其中的一塊或二塊著手，慢慢去推演出其中的道理。

學生花了很多的時間去嘗試錯誤，終於有了以下的成果（圖 14），雖然看起來沒有很複雜

的組合情況出現，但其間的腦力激盪是不容抹煞的（920702 觀）。

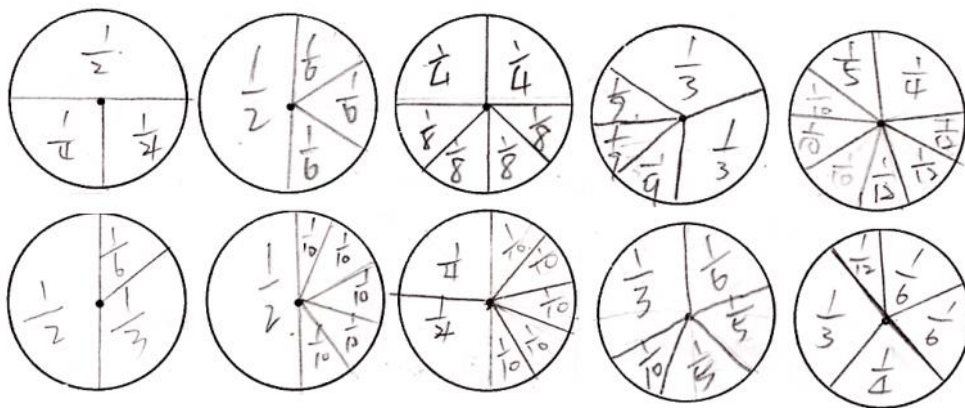


圖 14 學生實作

3. 再次與數學算式做連結

請學生將上述的組合情形中，有運用的等值分數的部分列式出來，例如： $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

$= \frac{5}{10}$; $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ 。用分數板讓學生再次驗證，當分子與分母同乘一個數時，結果會相

同的道理。以「分數板」為教具，對學生而言是全新的體驗，但可以讓學生很直覺地感受到分數的大小。雖然讓學生為自己的數學想法作辯證，也是一種新的嘗試與挑戰，但在同儕的協助之下，似乎也有樂趣存在（920702 觀）。

教學者：賦予抽象的算式意義不容易，教學者自己也常在現場就腦袋打結，不知下一步如何反應，這時把問題拋給學生，他們的回答往往有令人靈光乍現之感，所以學生也是教師行動研究中的好伙伴。

研究者：的確是如此！教與學原本就是互動的，有時候多聽聽小孩子的想法，不但讓自己（教師）更瞭解學生的概念發展，更可以讓學生在討論中進一步澄清自己的想法，並精緻化解決問題的方法。

4. 數學日記的迴響

在老師苦口婆心的心理喊話：「老師很認真教學，希望你也盡量把數學日記寫滿來回饋老師。」，再輔以互相觀摩的方式，希望提升學生寫數學日記的功力。以下為數學日記的內容分析（920702）：

(1)分數板幫助學生培養分數的數字常識～

S₂：今天老師叫大家拿不同的分數板排成一個圓，我和 S₄ 就想，拿有分數加起來變 $\frac{1}{2}$ ，

然後再找這一個分數的因數或倍數（如圖 15）。

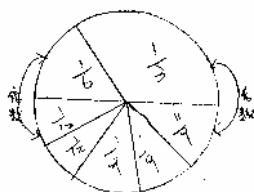


圖 15 S₂ 數學日記

在以前我就像老師說的，只看分母，而不看分子，所以考試時我有時寫對，有時寫錯，

專論

我有點不懂為什麼會這樣，但現在我知道了。

S₉：分數比大小要分子跟分母一起看。

(2)學生喜歡稍具困難及變化的挑戰，且因為覺得有趣，所以願意想很久，最後享受解題成功的快樂～

S₁₂：我覺得闖家大團圓這個活動非常有趣，就是要如何使披薩 = 1，我懂了，我們想很久，最後還是想出來。

S₁₀：今天我學到了怎麼把披薩分成 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ，還有 1 盤披薩是 $\frac{1}{12}$ 要有 12 塊。

S₇：以前都沒算過披薩，在算的時候好好玩喔，希望能再上一次。

S₁：我覺得數學很難，以前我都不想寫數學日記，可是我越寫越好玩了。

(3)「教學相長」就是學生會把最適合他們的學習方法反應給老師～

S₃：老師你用「算式」來解釋數學我聽不太懂，其實我比較懂老師用人、事、物來解說，這樣我會比較清楚，不是只有我這樣想而已；我走去講台前解釋數學圖形，我的心情是：為什麼會是我！出去後發現其實很簡單，其實之前我不懂到底怎樣才能變成 1。

5.教學的省思與改進

進行許多活動之後，很高興發現有些學生終於願意嘗試著把自己的想法表達出來，但是仍有學生選擇在一旁靜聽，不太發表意見。此外，也許是暑假的關係，有些學生心情顯得很浮躁，會不斷受教室外傳來的棒球隊訓練聲、孩子的嬉鬧聲所吸引，不然就和隔壁的聊起天來，這些事考驗著我的智慧與耐心，因此先從改善環境著手，放棄比較方便的樓下教室，而移師到樓上去。

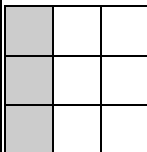
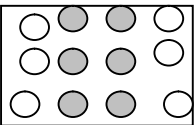

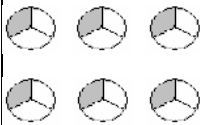
學生提到如果我用人、事、物來解說數學她比較懂，這個想法令我印象深刻。我想她指的是「5 隻螞蟻和 1 隻大象」、「身高比較」、「母子秤重」的例子，這些生活中的比喻與她

的背景知識較有關聯，而數學本來就是她不熟悉的東西，對於許多訊息就容易視若無睹，有「看」沒有「到」。另外，學生對於未接觸過的教具覺得新鮮、有趣，這是老師教學一個很好的切入點（920703 札）。

三、教學後學生迷思概念的改變

【A-10】下列哪一個圖形最能夠代表 $\frac{3}{6}$ 的意思？

表 3 前、後測答題結果比較

答案選項		* 		
前測選擇者	S ₁ , S ₃ , S ₅ , S ₆ , S ₇ , S ₁₂	S ₂ , S ₈ , S ₁₀		S ₄ , S ₉ , S ₁₁
後測選擇者		S ₁ , S ₂ , S ₃ , S ₄ , S ₅ , S ₇ , S ₈ , S ₉ , S ₁₀ , S ₁₂		S ₆ , S ₁₁

在後測的結果，答題正確的人數從 3 人增加至 10 人。S₅ 教學前因為長方形比較看得懂，而選擇第一個選項，教學後她打破了這樣的迷思：

T：為什麼你選第二個答案？

S₅：全部有 12 個圓圈，黑色的有 6 個，就是 $\frac{6}{12}$ 啊。

T：題目是說 $\frac{3}{6}$ 。

S₅：只要把 $\frac{6}{12}$ 約分就好了。

從 S₅ 的回答中知道她使用兩種正確的分數概念而得到答案，其一為把 6 個黑色圓圈看成是全部 12 個圓圈的一部份，所以是 $\frac{6}{12}$ ，而不是解讀為 6 個黑色圓圈和 6 個白色圓圈的關係；其二是對等值分數的理解，知道當分子和分母同時除以一个數時，其值並不會改變。

專論

S₁₂ 教學前認為第一個圖形有 3、有 6，就是 $\frac{3}{6}$ ，忽略所給定的單位量，而以二分法來找尋相

關的數字為答案，以下為教學後的訪談：

T：說說看你的想法。

S₁₂： $\frac{6}{12}$ 就是等於 $\frac{3}{6}$ ，就是答案了。

T：那你認為第一個圖形應該是多少？

S₁₂：嗯～ $\frac{3}{9}$ ，就是 $\frac{1}{3}$ 。

S₁₂ 似乎能很流暢地使用等值分數來解題，因此研究者回頭詢問她教學前所選擇的第一個錯誤圖形，想瞭解她是否同樣以等值分數的概念來解讀不同的圖形表徵，S₁₂ 的回答顯示其在概念上的一致性。

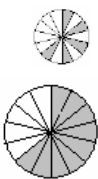
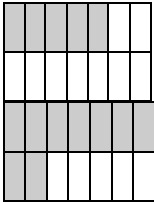

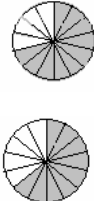
在補救教學活動之前，大部分的學生是以圖形的黑色及空白部分來決定分子、分母的數字，以尋找答案。教學之後，學生會考慮到整體單位量，也會運用等值分數的概念來判斷正確的圖形表徵。

S₆ 原先以熟悉的長方形表徵為選擇答案的依據，因為其他的圓形表徵她都看不懂。但是教學之後，她把 $\frac{3}{6}$ 解讀成 6 個 $\frac{1}{3}$ ，因為她說「有 6 個圓，每一個平分成 3 份裡的 1 份」，顯示 S₆ 分數表徵的經驗雖較以往豐富，但對分數詞的意義仍一知半解。而 S₁₁ 教學前、後的想法沒有改變，仍視 $\frac{3}{6} = 6 \times \frac{1}{3}$ 。

【二】下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{9}{14}$ 哪一個分數比較大？

在（二）的後測結果有 9 人答對，3 人錯誤。上述學生在圖形表徵的比較大小時要答題正確，首先要注意到兩者的單位量必須相同，然後再把等值分數的想法運用上來。缺少任一種概念，學生就不會解題成功。

表 4 (二) 前、後測答題結果比較

答案選項	 $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$			* 
前測選擇者		S ₁ , S ₂ , S ₃ , S ₅ , S ₆ , S ₁₁	S ₄ , S ₈ , S ₉ , S ₁₀ , S ₁₂	S ₇
後測選擇者		S ₃ , S ₅ ,	S ₁₀	S ₁ , S ₂ , S ₄ , S ₆ , S ₇ , S ₈ , S ₉ , S ₁₁ , S ₁₂

S₁、S₂教學前的想法為「我只有看上面那一排」，會自行改變單位量的大小，

在教學後的訪談表示「要一樣大才能平分」，有注意到兩者的單位量必須一致。教學前，S₆

認為第二個圖形「它的 $\frac{5}{7}$ 是7格有5格是滿的，它說 $\frac{9}{14}$ 不就是 $7 \times 2 = 14$ ，再畫9格」，S₁₁

認為「我覺得格子一樣大，一樣多」，都顯示出不具有正確的等值分數概念；教學後，S₆表示

「它們正好是公平的比」，顯示出開始注意到分數比較時的公平原則；S₁₁表示「有14格但是

分子5共有10個，有14格但分子9共有9個」，具有正確的等值分數概念。

原本選擇錯誤選項(3)的S₄想法是「這裡一共有7塊，裡面有5塊等於 $\frac{5}{7}$ ；這裡一共

有14塊，裡面有9塊等於 $\frac{9}{14}$ 」，以個別的圖形表徵來看，S₄對於分數詞的解讀是正確的，但

是具有兩個分數比較大小時，單位量要一致的迷思概念。以下為教學後的訪談：

T：為什麼你選擇第四個答案？

$$S_4: \frac{5}{7} = \frac{10}{14} > \frac{9}{14}$$

T：那為什麼不選擇第一個答案？

S₄：它們沒有一樣大啊！

專論

S₄ 使用等值分數的概念，把分子和分母同乘以 2，得到 $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ ，再與 $\frac{9}{14}$ 進行比較。研究者爲了進一步確定學生是否突破了兩個分數比較大小時，單位量要一致的迷思概念，而有了再次的追問，學生的回答顯示出她注意到單位量要相同的問題。

S₃ 和 S₅ 雖然在教學前後都選擇了同一個錯誤答案，但想法卻有所不同。S₃ 原先的說法是「我覺得一樣的格子比較看得懂，圓形的就不懂了」，之後認爲要公平，數目要一樣才能比，但只注意到兩者的格子數要相同，仍不瞭解等值分數的意義是，當分母擴大爲 2 倍時，分子也要跟著擴大 2 倍，其值才不會改變，顯示眼界稍微寬廣，概念仍嫌不足。S₅ 會自行決定單位量的大小「我把它的一行格子拿走就成了 $\frac{5}{7}$ 」，後來想法改變爲「格子要一樣多」，和 S₃ 一樣考量到公平原則。S₁₀ 經教學後仍然未注意到兩分數比較大小時，單位量要一致的先決條件。綜合以上的分析，歸納出 12 位學生在等值分數概念的改變情形，如表 5：

表 5 12 位學生在教學前後的等值分數迷思概念改變情形

項目/學生	對等值分數的意義 不瞭解		等值分數的求法和分數的 乘法混淆	
	前	後	前	後
S ₁	◎		◎	
S ₂	◎		◎	
S ₃	◎	★	◎	★
S ₄	◎		◎	
S ₅			◎	★
S ₆	◎	★	◎	★
S ₇	◎		◎	
S ₈	◎		◎	★
S ₉	◎		◎	
S ₁₀	◎		◎	★
S ₁₁	◎	★	◎	
S ₁₂	◎			

註：打◎記號表示教學前已具有的迷思概念，打★記號爲教學後仍具有之迷思概念

從上表中發現，學生對於等值分數的意義大都能有良好的理解，且不再侷限於單一的圖形表徵，較能轉換不同表徵之間的意義。但仍將近一半的學生仍然無法克服「等值分數的求法和分數的乘法混淆」，此正顯示未來的教學在此部分仍須進一步思考如何幫助學生發展正確的分數概念。

伍、結論與反思

一、結論

多一點時間、多一點對話，讓孩子造就不同的學習信心。使用具體物操作的方式來學習、理解等值分數抽象概念，對孩子而言並不陌生，但是礙於現實中的環境，他們沒有豐富的實際操作機會，以致在建立等值分數概念的心像上，與抽象符號表徵間產生落差，特別是數學學習能力較低落的孩童。基於此信念下，我們展開了一場等值分數教與學的對話，期望藉由如此實務的教學研究之下，提出可供其他教師在等值分數的教學參考依據。以下將從下列兩點探討本研究之結論：

(一)教學後訪談結果顯示學生在等值分數概念上皆有顯著之成長

教學前多數學生由於缺乏分數基本概念與單位量概念，以致於在處理等值分數問題時皆無法有效的解決問題，但是在教學後之訪談結果確顯示學生不但在分數之基本意義與單位量概念有大幅度之改進，同時在解等值分數之問題時，由於已具備基本之能力，因此多數孩子面對等值分數之問題時皆能迎刃而解。雖然本研究只進行兩個教學活動，但由於教學者能夠發揮巧妙的教學技巧，引導學生從具體操作中瞭解等值分數之基本意義，進而發展至抽象之等值分數的概念。

(二)教學活動之歷程可做為未來教等值分數單元之參考依據

活動一「切蛋糕」是利用簡單的摺紙活動，讓學生可以直接透過具體物的操作、比較與了解等值分數的意義。教師將學生所摺出來的圖形（塊數不同）並置在一起，讓學生觀察，直接發現分數 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{6}$ 、 $\frac{3}{9}$ 在相同大小的紙上所佔據的大小是一樣的，進而建立起 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ 的等值分數由來。此外，等值分數求法的算則意義，也因為利用將所摺的紙張並置後，學生對其背後所表示

專論

的意義「分母所乘的倍數，表示切割成更小的部分，所以分子的份數也要跟著變大，這樣才會跟原來的分數相等」，我想對這些數學學習能力較低落的孩子而言，能有這樣的發現，不僅讓他們對數學學習更上一層樓，著時也讓我增添了一份成就感。「 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 」只要很簡單的分子分母同乘 2 就可得到，但是該如何讓學生對「等值分數的求法就是分子和分母同乘一整數」產生有意義的理解，遠比只是單純作數字的運算來得重要。而整個切蛋糕的活動，從具體、半具體到抽象符號的教學過程，不僅幫助學生建立了等值分數的意義，更讓學生了解等值分數有意義的求法，但是這樣的教學過程該如何順利作連結，也在在顯示著教師的專業素養的重要性。

活動二闖家大團員是使用「分數板」讓孩子親身體驗單位量 1 與其他分數間的關係，進而對等值分數作更深入的探究。爲了不讓學生一再停留在圖形上的操作與輔助，研究者嚴格地要求學生必須利用「數學」的方式來跟大家進行溝通，並且利用「切蛋糕」活動中所學到的等值分數概念來進行解題。分數板的操作讓學生再次體驗，當分子和分母同乘一個數時，結果會相同的道理。此外，也讓學生在不同的情境之下，接受另一種不同概念的洗禮。

二、教學之行動反思

(一)「教」與「學」的溝通是讓師生教學相長最好的過程

建立孩子的自信心是成功學習的開頭，而建立溝通對話是不二法則：在等值分數教學活動實施的過程中發現，其實這些數學學習能力較低落的孩子並不害怕接受挑戰，可是他必須要先能找到自己也能完成一些什麼的信心，才有力量在學習活動中動起來 (Reys, 1984)。例如：學生提到， S_{12} 「要如何使披薩 = 1，我懂了，我想很久，最後還是想出來」； S_1 「我覺得數學很難，以前我都不想寫數學日記，可是我越寫越好玩了」； S_3 「我走去講台前解釋數學圖形，我的心情是：為什麼會是我！出去後發現其實很簡單」。基於此，老師們應該尊重孩子的自然想法，不要急於責備孩子的錯誤，不要急於告訴他解法或代替他學習，鼓勵孩子的成就，提升孩子的信

心，彰顯孩子學習所得，期許孩子透過成功的經驗，提高學習的興趣和信心。

最好的教學方法是來自師生之間對話的激發：大部分的老師在教學上都會有一個疑惑：我明明講解得很清楚了，且一再地強調，為什麼學生還是不懂？「例如：老師們常說找等值分數就是分子和分母同時乘以相同的數啊」，其實這樣的算則所代表的意義對學生來講並不那麼理所當然。而在教學的當時，當下我並沒有準備任何完善的解釋方案，等待回答上述問題，但是

學生的一句回答 S7：「 $\frac{1}{3}$ 如果再對切一次，那就變成 6 等份，那麼就要拿 2 等份，那就是都 2 倍」，霎時讓我有種頓悟的感覺：「原來最好的教學方法，學生已經在過程中把最適合他們的學習方式反應給老師了」。

(二)多元具體物的操作是學習等值分數的必要過程

人們常說「不可能無中生有」，在數學學習的領域亦同，當我們對某種概念缺乏背景知識，無法形成假設時，就容易變成有「看」卻沒有「到」。這就是為什麼許多的訊息在數學課室中不斷地被強調，學生仍然會視若無睹，可見當新概念引進來時，讓學童進行充分的具體物操作是不可少的工作（Bezuk & Cramer, 1989; Cramer, et al., 2002; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1992; Ross & Kurtz, 1993），此亦應證教育家杜威所說的「做中學」的道理。而在本研究中，學生體悟到分母所乘的倍數，即是代表切割成更小的份數，那麼就要拿走更多的份數（這就是分子），才會與原來的分數相等，此正是具體操作經驗的開花結果。

參考文獻

王安蘭（2004）。一個重構高中生機率概念的行動研究。台北：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。

林玉祥（2004）。分數拼板妙用多。國教輔導，44(1)，34-40。

專論

- 吳芝儀、李奉儒（1995）譯（M. Q. Patton 原著）。質的研究與評鑑。台北：桂冠。
- 南一書局國小數學教科用書編撰委員會（1998）。國民小學數學科教科書及指引。台北：南一書局。
- 國立編譯館國民小學數學科教科用書編審委員會（1998~2001）。國民小學數學科教科書及指引。台北：國立編譯館。
- 教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域。台北：教育部。
- 教育部（2003）。樂在數學—國民中小學數學教學參考手冊。台北：教育部。
- 黃志敘（2005）。資訊融入等值分數教學。國教天地，**160**，49-55。
- 楊德清、洪素敏（2003）。比較分數大小~從具體、半具體至抽象符號表徵之教學行動研究。南師學報，**37**(2)，75-103。
- 甯自強（1997）。量的子分割（三）~等值分數的引入~。教師之友，**38**(5)，36~40。
- 劉秋木（1996）。國小數學科教學研究。台北：五南。
- 蔣治邦、陳竹村、陳俊瑜、林淑君（2001）。國小數學教材分析—分數的數概念與運算。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。
- 龐嘉芬、陳淑琳（2000）。談國小學童等值分數概念的瞭解。屏師科學教育，**12**，34-41。
- Behr, M., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Post, T. (1984). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 18-37.
- Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 201-248). Boston: Allyn & Bacon.
- Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, When, and How? In Paul R. Trafton and Albert B. Shult (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 156-167), 1989 Yearbook of NCTM, Reston, VA: NCTM.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth -and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (2), 111-144.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. An educational approach. Dordrecht : Reidel.
- Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of mathematical behavior*, *14*, 365-378.

- Murray, H., Oliver, A., & Human, P. (1996). *Young students' informal knowledge of fractions*. Proceedings of the 20th Conference of the International Group for PME, 4, 43-50. Valencia, Spain.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: past, present and future. *Elementary School Journal*, 84(5), 546-557.
- Ross, R., & Kurtz, R. (1993). Making manipulatives work: A strategy for success, *Arithmetic Teacher*, 254-257.
- Post, T. R., Cramer, K., Behr, M. J., Lesh, R. & Harel, G. (1992). Curricula implications of research on the teaching and learning of rational numbers concepts. In T. Carpenter, T., E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Research on the teaching, learning, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vence J. H. (1992). Understanding equivalence: A number by any other name. *School Science and Mathematics*, 92(5), 263-266.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight — A theory of mathematics education*. London: Academic Press.

誌謝

本研究蒙國科會專題研究計畫補助，計畫編號 NSC-94-2521-S-415-003，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。

A Study of Remedial Instruction on Equivalent Fractions

Su-Min Hung* Der-Ching Yang Feng-Chiu Tsai*****

The purpose of this study was to examine the outcomes of remedial instruction for students who had misconceptions on equivalent fractions. Twelve students were selected from a small elementary school in middle Taiwan through interview before the instructions. Based on the students' misconceptions about equivalent fractions and on literature review, the researchers designed activities for remedial instructions.

The findings of the study indicated that most of the students could not solve the problems of equivalent fractions due to a lack of understanding about the basic meaning of fractions before the instructions. After the remedial instructions, most of the students not only built firm understanding about fraction meanings and the concept of unit, but also had a lot of progress in solving equivalent fraction problems. With the remedial instructions, the students in this study not only gained their confidence in mathematical learning, but also improved their understanding about equivalent fractions.

keywords : equivalent fractions, concrete teaching materials, 5th grade

* Wann Shing Public Elementary School, Changhua

** Professor, Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University
(Corresponding Author)

*** Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University